Математические рассмотрение эволюции

- генотип

- (фенотипическая) приспособленность

- генетическая вариабельность

Фишер, Райт, Кимура, Эйген и др – количественный анализ

Эволюция эпох

Периоды стазиса между инновациями (пунктуированные равновесия) – палентологические записи морфологических изменений, бактериальные колонии, моделирование тРНК

Возникновение эпидемий, развитие рака, культурный прогресс

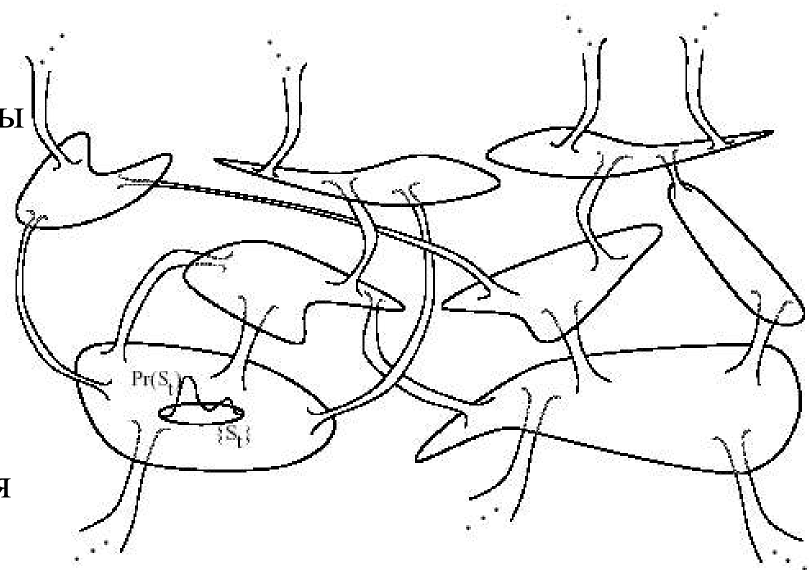
Географическая метафора:

Адаптивные ландшафты (поверхности приспособленности)

Свойство: вырожденность отображения генотип-фенотип – нейтральность эволюции

Бассейны равной приспособленности порталы между ними

Нейтральный дрейф по сети бассейнов до нахождения сети с более высокой приспособленностью



Пароль перед порталом – особая комбинация генов, эффект основателя

Адаптация – освоение новой сети

МОДЕЛЬ

$$\underbrace{\overbrace{101\cdots011}^{K}\,101100010\cdots10100111001}_{NK}$$

К блоков по N

f= число идеальных блоков (из 1)

Портал – новый блок

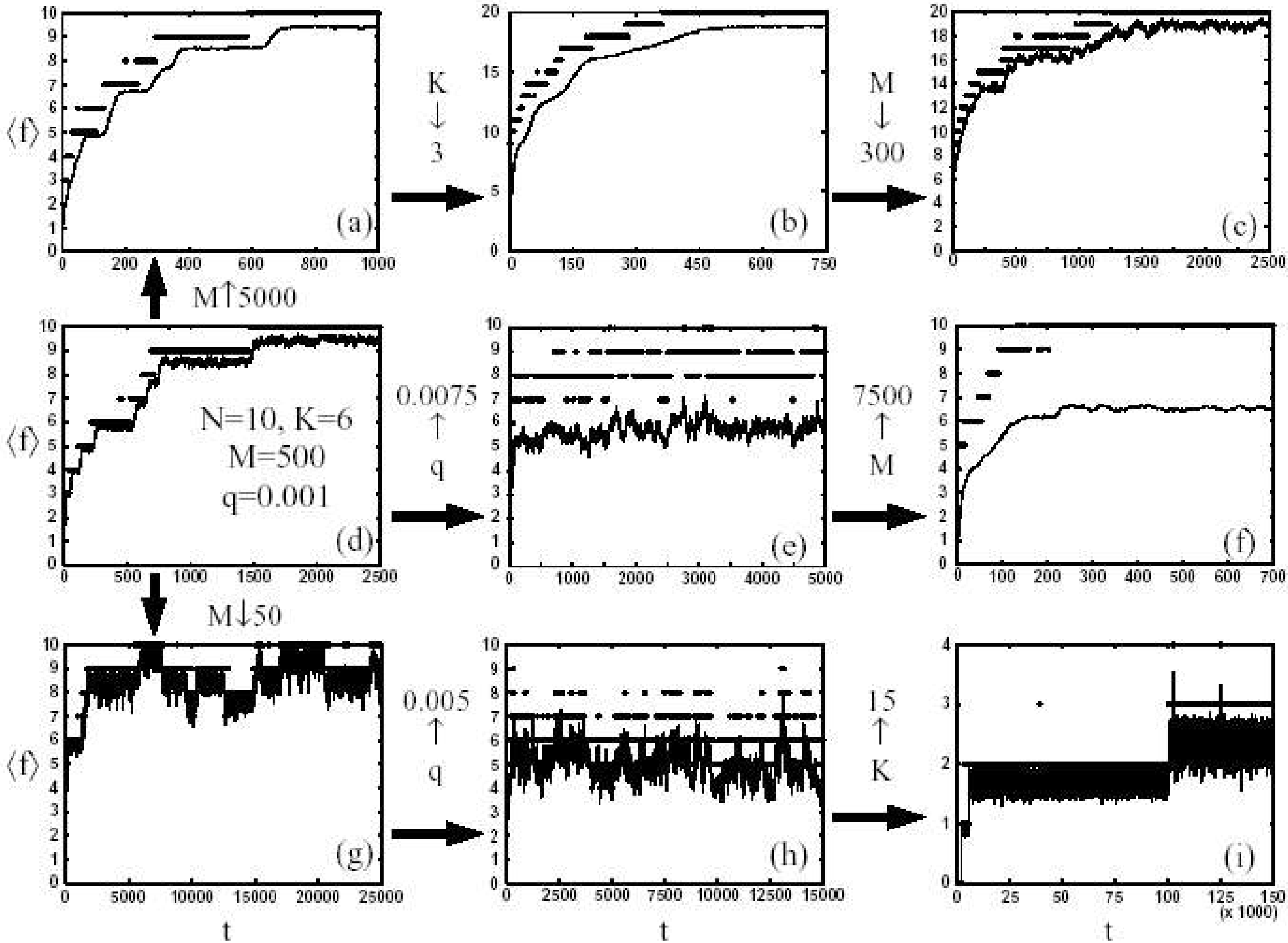
ГА:

М строк длины KN

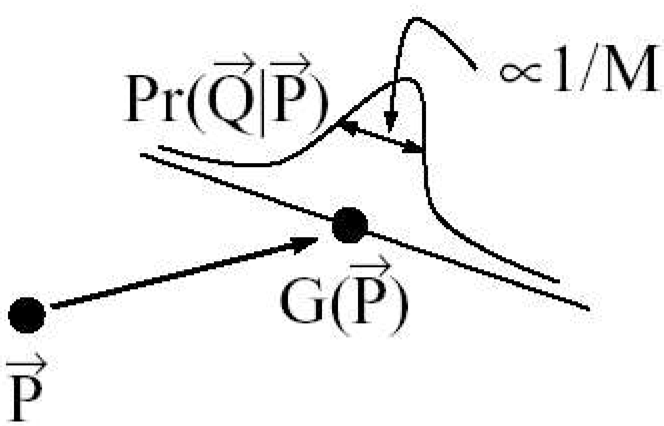
Пропорциональная приспособленности селекция

Мутации с вероятностью q

Динамика ГА при разных параметрах



Вероятностное отображение популяции



$$\Pr[\vec{P}^n \to \vec{P}^m] = M! \prod_{i=0}^{N} \frac{[\mathbf{G}_i(\vec{P}^n)]^{m_i}}{m_i!},$$

Распределение популяции по приспособленности P(f, t),

два первых момента

$$\sum_{f=0}^{N} P_f = 1.$$

$$\langle f \rangle = \sum_{f=0}^{N} f P_f.$$

Генетические операторы

$$\vec{P}(t+1) = \mathbf{G}[\vec{P}(t)],$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S},$$

Вероятность мутационного преобразования случайного блока в идеальный (суммирование по числу нулей в блоке)

$$A = \frac{1}{2^K - 1} \sum_{d=1}^{K} \binom{K}{d} q^d (1-q)^{K-d} = \frac{1-(1-q)^K}{2^K - 1}.$$

Вероятность разрушения идеального блока мутациями

$$D = 1 - (1-q)^K.$$

Вероятность мутационного изменения приспособленности i->j

Сумма вероятностей того, что

k блоков превратятся в идеальные

l идеальных блоков будут разрушены

при условии j+k-l=i

$$M_{ij} = \sum_{k=0}^{N-j} \sum_{l=0}^{j} \delta_{j+k-l,i} \binom{N-j}{k} \binom{j}{l} A^k (1-A)^{N-j-k} D^l (1-D)^{j-l}.$$

Пропорциональная селекция

$$P_i^s = c\, i\, P_i,$$

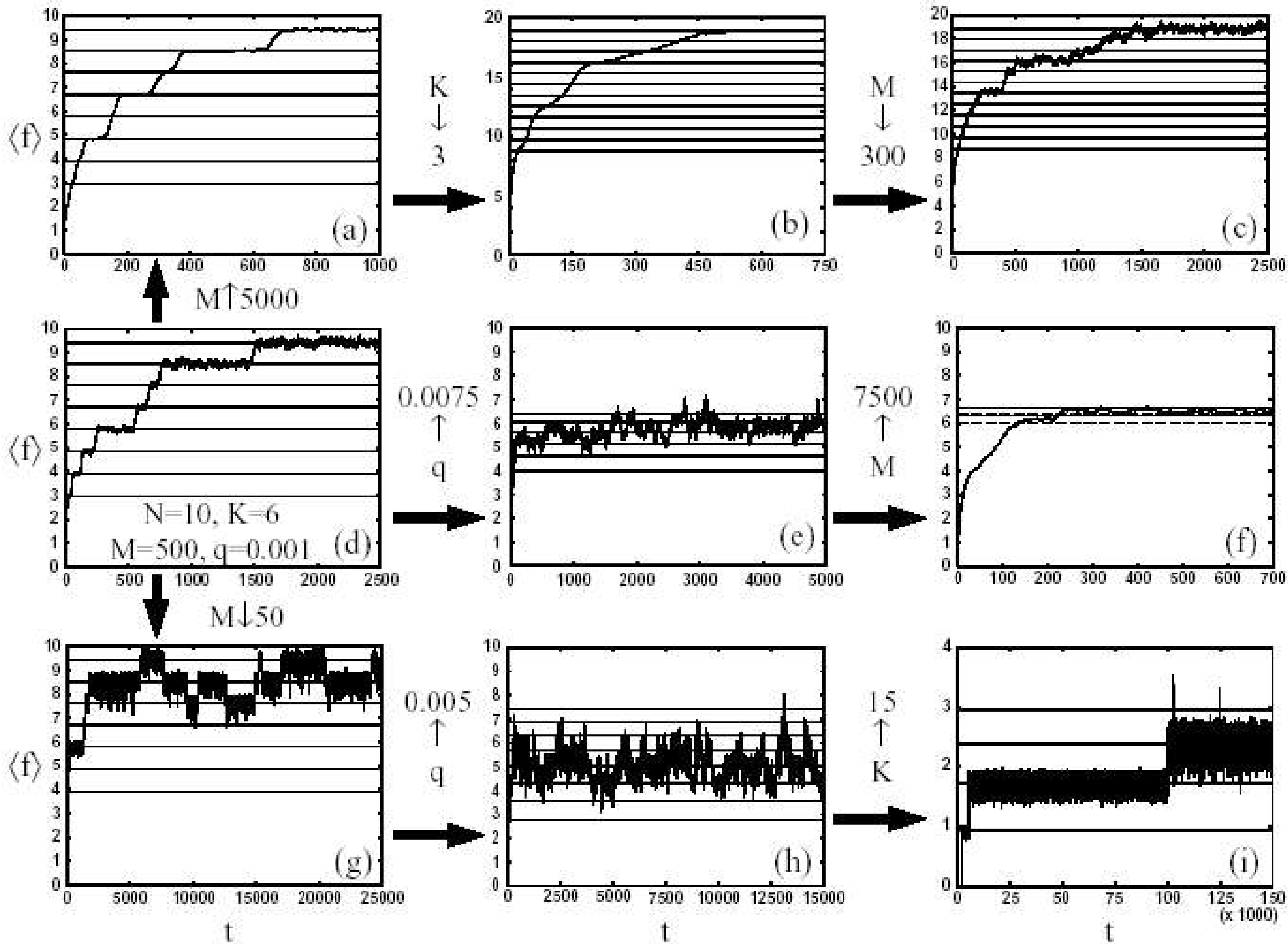
$$\sum_{i=0}^{N} P_i^s = 1.$$

$$c = \left[\sum_{i=0}^{N} i P_i\right]^{-1} = \frac{1}{\langle f \rangle},$$

Генетический оператор $\vec{P}(t) = \mathbf{G}^t[\vec{P}(0)]$

$$\mathbf{G}_{ij} = \sum_{k=0}^{N} \mathbf{M}_{ik} \mathbf{S}_{kj}.$$

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{i\delta_{ij}}{\langle f \rangle}.$$



Сколько эпох?

Эпоха n

$\vec{P}^n$ Центр эпохи $\tilde{\mathbf{G}}^n \cdot \vec{P}^n = e_n \vec{P}^n$

f_n

Способ решения: разложение по q

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{H}}^{\mathbf{0}} + q\tilde{\mathbf{H}}^{\mathbf{1}} + \mathcal{O}(q^2)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{ij} = j\left[\delta_{ij}\left(1 - q(A_1(N-j) + Kj)\right) + \delta_{(i-1)j}A_1(N-j)q + \delta_{(i+1)j}Kjq\right] + \mathcal{O}(q^2)$$

$$A = A_1 q + \mathcal{O}(q^2) = \frac{K}{2^K - 1}q + \mathcal{O}(q^2)$$

$$P_i^n \equiv \delta_{in} + q\Delta_i^1$$

$$e_n = n + qe_n^1.$$

$$\tilde{\mathbf{G}} \cdot \vec{P}^n = e_n \vec{P}^n,$$

$q \to 0$, $e_n = n$ and $P_i^n = \delta_{in}$

$$P_n^n = (1 - n^2 K q) \text{ and } P_{n-1}^n = n^2 K q.$$

$$e_n = n - \left[n^2 K + n(N - n) A_1 \right] q$$

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} i P_i^n \qquad f_n = n - n^2 K q$$

Качественный вывод: баланс между селекцией и мутациями

$$P_n^n \to \frac{n}{f_n} P_n^n \to P_n^n \frac{n}{f_n} (1-q)^{nK}$$

$$f_n = n(1-q)^{nK}$$

Средняя приспособленность эпохи пропорциональна вероятности репликации без мутаций всех определяющих эпоху битов

Время перехода между эпохами

$$\vec{P}(t) = (1 - \alpha(t))\vec{P}^{n} + \alpha(t)\vec{P}^{n+1}$$

$$\alpha(0) = 1/M \qquad \alpha = 1 - 1/M$$

Действуя оператором G

$$\alpha(t+1) = \frac{f_{n+1}}{f_{n+1}\alpha(t) + (1-\alpha(t))f_n}\alpha(t)$$

Упр: Свести приближенно к дифференциальному уравнению и решить

$$t_n = \frac{2+\gamma_n}{\gamma_n} \log[M-1]$$

Полагая q малым и M большим

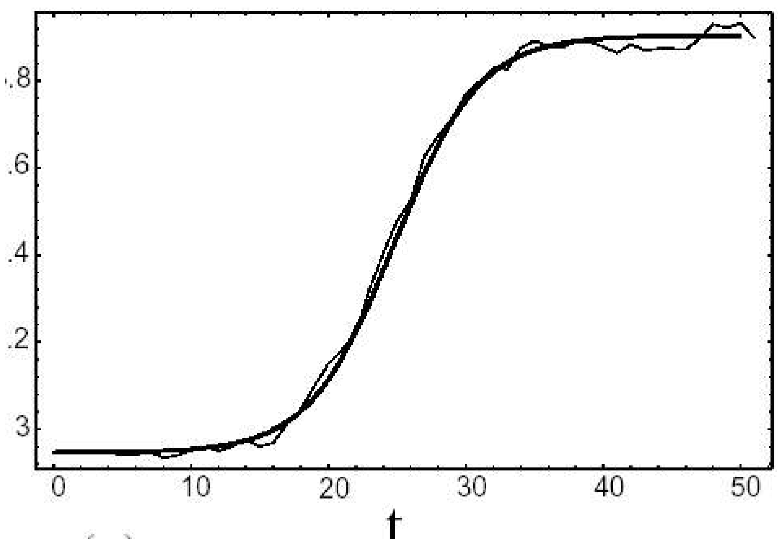
$$t_n = [1 + 2n + 2Kn(n+1)q] \log M + \mathcal{O}(q^2)$$

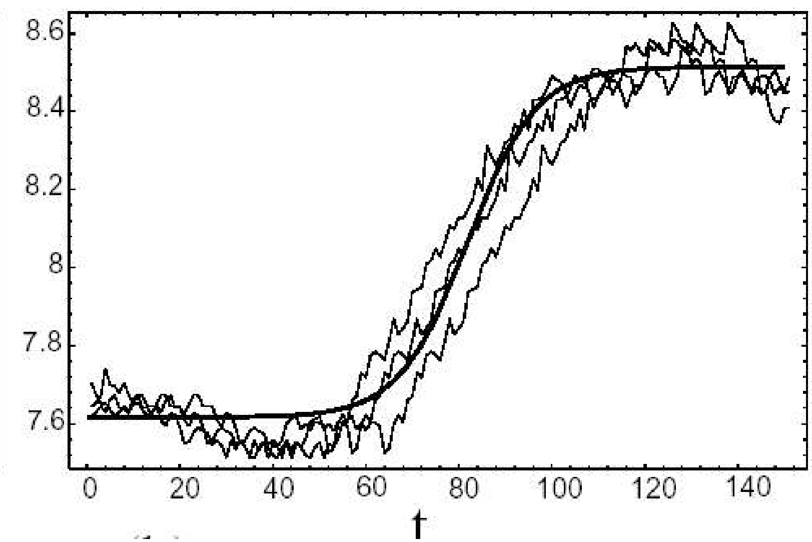
Упр: Свести приближенно к логистическому уравнению

$$\alpha(t) = \frac{\exp(\gamma_n t)}{\exp(\gamma_n t) + M - 1}$$

Средняя приспособленность в переходный период

$$\langle f(t)\rangle = f_n + (f_{n+1} - f_n)\alpha(t)$$

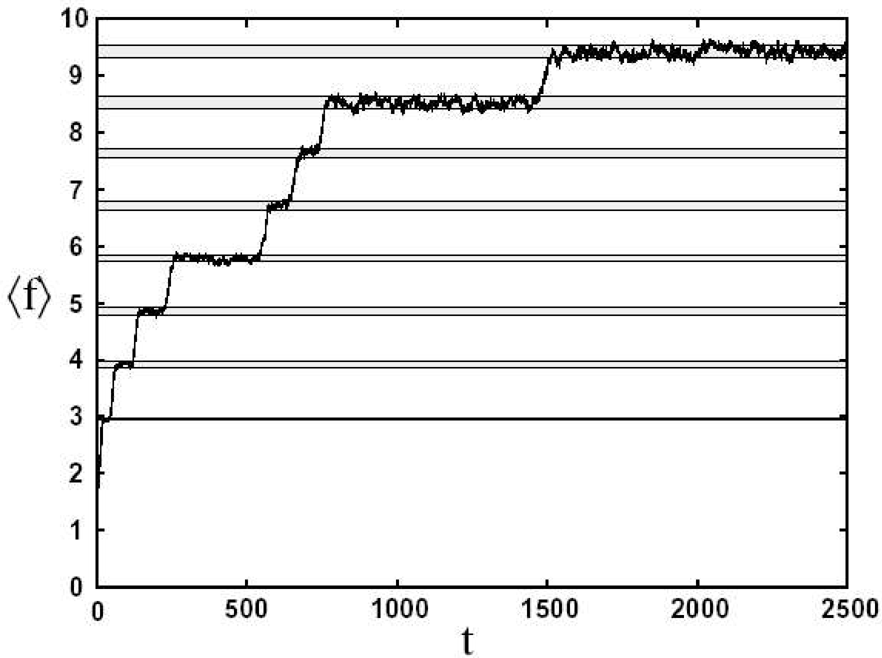




n=4 n=8 и 9

$N = 10$, $K = 6$, $q = 0.001$, and $M = 500$

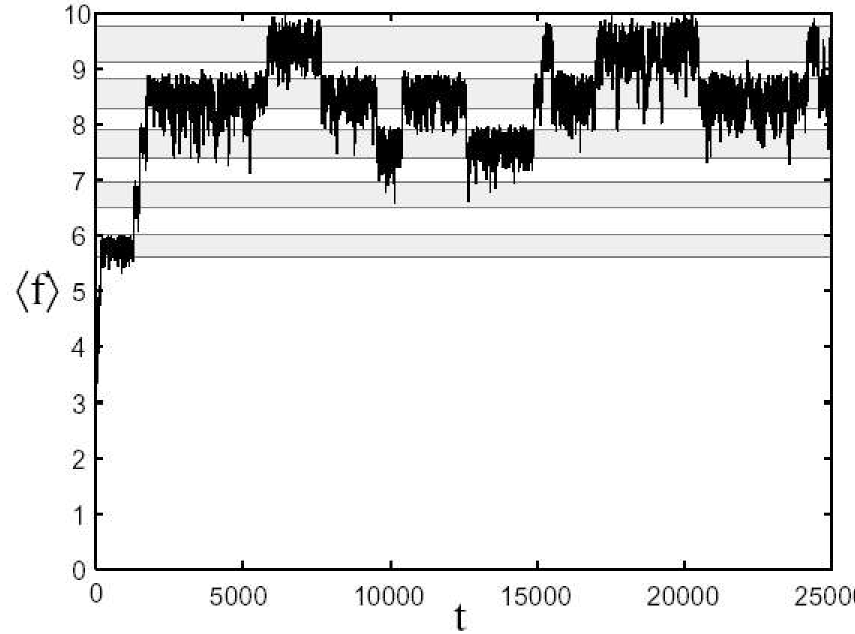
Рассматривая флуктуации вокруг центра эпохи и выписывая уравнение диффузионного типа



$N = 10$, $K = 6$, $q = 0.001$, and $M = 500$

$$\mathrm{Var}[f] = \frac{Kn^3q}{2M}$$

На больших n возникает перемежаемость



$$P_n^n = (1 - n^2 K q)$$

Вероятность пустого класса

M=50

$$\Pr(f \neq n) = (1 - P_n^n)^M \approx (n^2 K q)^M$$

катастрофа ошибок

Длительность эпохи:

Возникновение особи с более высокой приспособленнотью

Распространение нового генотипа в популяции

$$q_o = \frac{1}{3(nK)n^{0.175}}$$

Адаптивные мутации:

скорость мутаций, минимизирующая длительность эпохи

Основные характеристики модели

$f_n = n(1-q)^{nK}$ (6.17) Epoch fitness

$\sigma_n^2 = Kn^3 q/2M$ (6.48) Epoch fitness fluctuations

$P_n^n = 1 - n^2 Kq$ and $P_{n-1}^n = n^2 Kq$ (6.12) Epoch population

$\lambda_i^n = f_i/f_n = i(1-q)^{(i-n)K}/n$ (6.23) Epoch stability

$T_n = [M(N-n)A(1-\exp(-2/n))]^{-1}$ (7.12) Epoch duration

$t_n = [1 + 2n + 2Kn(n+1)q]\log M$ (6.32) Innovation duration

titov@bionet.nsc.ru

sbj: задача

Statistical Dynamics of the Royal Road Genetic Algorithm

Erik van Nimwegen,[†]
James P. Crutchfield,[†‡] and
Melanie Mitchell[†]
[†]Santa Fe Institute, 1399 Hyde Park Road, Santa Fe, NM 87501
[‡]Physics Department, University of California, Berkeley, CA 94720-7300

Theoretical Computer Science (1998).