Лекция 7

п3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

В этом пункте мы рассмотрим теорему существования и единственности решения задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y = y^0 \text{ при } t = t_0, \qquad (1)$$

которая носит название локальной теоремы Пикара.

Теорема. Пусть в области

$$B = \{ |t - t_0| \le T, \ \|y - y^0\| \le R \}$$

1^0 определена непрерывная вектор-функция f(t, y) скалярного аргумента t и векторного аргумента y, норма которой, как следствие непрерывности f(t, y) в области B, ограничена константой F:

2^0
$$\|f(t, y)\| \le F, \quad (t, y) \in B.$$

3^0 Матричная функция

$$f_y(t, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(t, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(t, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(t, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(t, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(t, y) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(t, y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(t, y) & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}(t, y) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(t, y) \end{bmatrix}.$$

непрерывна и $\|f_y(t, y)\| \le L.$

При этом задача Коши (1) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $y(t)$, определенное на отрезке Пеано

$$|t - t_0| \le T_0 = \min(T, \frac{R}{F}),$$

не выходящее за область определения f(t, y): $\|y(t) - y^0\| \le R$.

Доказательство. Предварительно докажем утверждение, известное как лемма Адамара.

Лемма Адамара. Пусть вектор-функция f(t, y) удовлетворяет условиям 1^0,2^0,3^0. Тогда для любых непрерывных вектор-функций z(t) и w(t), таких что

$$\left\| z(t) - y^0 \right\| \le R\,, \quad \left\| w(t) - y^0 \right\| \le R\,, \quad |t - t_0| \le T,$$

разность $f(t, z(t)) - f(t, w(t))$ может быть представлена в виде:

$$f(t, z(t)) - f(t, w(t)) = A(t)(z(t) - w(t)), \tag{2}$$

где

$$A(t) = \int_0^1 f_y(t,\ (1-\lambda) w(t) + \lambda z(t))\, d\lambda\,. \tag{3}$$

Действительно, как легко заметить, формула (2) является прямым следствием формулы (18) (лекция 6):

$$g(u^2) - g(u^1) = \int_0^1 g_u(u(\lambda)) d\lambda\ (u^2 - u^1). \tag{4}$$

Если в (4) заменить формально $g(u)$ на вектор-функцию $f(t, y)$, считая t параметром, и выполнить подстановку

$$u^1 = w(t),\ u^2 = z(t),\ \ u(\lambda) = (1-\lambda) w(t) + \lambda z(t)\,,$$

то в результате получаем формулу (2), (3). Кроме того, из (3) следует, что $\|A(t)\| \le L.$ **.**

Следствие из леммы Адамара. Пусть вектор-функции z(t) и w(t), определенные в лемме Адамара, удовлетворяют, кроме того, условию:

$$\| z(t) - w(t) \| \le S_k \frac{|t - t_0|^k}{k!}.$$

Тогда

$$\left\| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, z(\tau)) - f(\tau, w(\tau))] d\tau \right\| \le L S_k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}\,. \tag{5}$$

Действительно, так как согласно лемме Адамара,

$$f(t, z(t)) - f(t, w(t)) = A(t)(z(t) - w(t))\,,$$

то

$$\left\| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, z(\tau)) - f(\tau, w(\tau))] d\tau \right\| = \left\| \int_{t}^{t} A(t)[(z(\tau) - w(\tau)] d\tau \right\| \le$$

$$\le L \left| \int_{t_0}^{t} \| z(\tau) - w(\tau) \| dt \right| \le L S_k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}\,.$$

Приступим к непосредственному доказательству теоремы Пикара. Определим на отрезке Пеано последовательность вектор-функций (последовательность Пикара):

$$y^{[0]}(t),\ y^{[1]}(t)\ ,...,\ y^{[k]}(t),...\ ,\ |t-t_0| \le T_0,$$

где

$$\begin{aligned}
&y^{[0]}(t) \equiv y^0,\\
&y^{[1]}(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{[0]}(\tau))\,d\tau,\\
&y^{[2]}(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{[1]}(\tau))\,d\tau,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y^{[k]}(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{[k-1]}(\tau))\,d\tau,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{6}$$

Убедимся, что последовательность Пикара не выходит за область определения f (t,y), т.е.

$$\left\|y^{[j]}(t) - y^0\right\| \le R,\ \text{j = 0,1,2, …. , если } |t-t_0| \le T_0, \tag{7}$$

и, следовательно, при выполнении (7) вектор-функции $f(t,y^{[j]}(t))$, j=0,1,2,…, будут определены в области B, удовлетворяя неравенствам: $\left\|f(t, y^{[j]}(t))\right\| \le F.$ Заметим, что согласно определению отрезка Пеано $FT_0 = R$, если min(T,R/F) = R/F, и $FT_0 \le R$, если min(T,R/F) = T.

Принадлежнось $y^{[0]}(t)$ области B, а вместе с этим и $f(t,y^{[0]}(t))$, очевидна. Отсюда следует вывод о том, что формула

$$y^{[1]}(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{[0]}(\tau))\,d\tau,$$

действительно определяет $y^{[1]}(t)$. При этом $\left\|f(t, y^{[0]}(t)\right\| \le F.$

Так как

$$\left\|y^{[1]}(t) - y^0\right\| = \left\|\int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{[0]}(\tau))\,d\tau\right\| \le F|t-t_0| \le FT_0 <= R.$$

то в выражении

$$y^{[2]}(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{[1]}(\tau))\,d\tau \tag{8}$$

вектор-функция f(t,$y^{[1]}$(t)) определена в области B. Поэтому $y^{[2]}$(t) действительно определяется формулой (8). Отсюда имеем оценку

$$\left\| y^{[2]}(t) - y^0 \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{[1]}(\tau))\,d\tau \right\| \le F|t - t_0| \le FT_0 \le R, \text{ и т.д.}$$

Предположим, что

$$\left\| y^{[k-1]}(t) - y^0 \right\| \le R.$$

Следовательно, вектор-функция f(t,$y^{[k-1]}$(t)) определена в области B и $\left\| f(t, y^{[k-1]}(t)) \right\| \le F.$ В результате приходим к неравенству:

$$\left\| y^{[k]}(t) - y^0 \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{[k-1]}(\tau))\,d\tau \right\| \le F|t - t_0| \le FT_0 <= R.$$

Тем самым завершено обоснование существования последовательности Пикара (6) на отрезке Пеано. Попутно нами доказано, что все члены последовательности Пикара удовлетворяют неравенству:

$$\left\| y^{[j]}(t) - y^0 \right\| \le F|t - t_0| \quad , \text{j} = 0, 1, 2, \ldots$$

Докажем теперь, опираясь на признак Вейерштрасса, равномерную сходимость последовательности Пикара или, что то же самое, равномерную сходимость бесконечного функционального ряда:

$$|t - t_0| \le T_0,$$

$$y^{[0]}(t) + [y^{[1]}(t) - y^{[0]}(t)] + [y^{[2]}(t) - y^{[1]}(t)] + \ldots + [y^{[k]}(t) - y^{[k-1]}(t)] + \ldots \qquad (9)$$

Согласно признаку Вейрштрасса требуется оценить нормы членов ряда (9):

$$\| y^{[0]}(t) \| + \| y^{[1]}(t) - y^{[0]}(t) \| + \| y^{[2]}(t) - y^{[1]}(t) \| + \ldots + \| y^{[k]}(t) - y^{[k-1]}(t) \| + \ldots \qquad (10)$$

В соответствии с определением членов последовательности Пикара (6) имеем:

$$\left\| y^{[k+1]}(t) - y^{[k]}(t) \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, y^{[k]}(\tau)) - f(\tau, y^{[k-1]}(\tau))]\,d\tau \right\|, \text{ k = } 0,1,2, \ldots .$$

Дальнейший вывод оценок для норм членов ряда (10) связан со следствием из леммы Адамара в виде неравенства (5).

При k = 0 имеем:

$$\left\| y^{[1]}(t) - y^0 \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{[0]}(\tau))\, d\tau \right\| \le F|t - t_0|$$

При k = 1

$$\left\| y^{[2]}(t) - y^{[1]}(t) \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, y^{[1]}(\tau)) - f(\tau, y^{[0]}(\tau))] d\tau \right\| .$$

Так как

$$\left\| y^{[1]}(t) - y^0 \right\| \le F \frac{|t - t_0|}{1!} |t - t_0| \ ,$$

то, полагая в (5) k = 1, S_k = F, получаем:

$$\left\| y^{[2]}(t) - y^{[1]}(t) \right\| \le LF \frac{|t - t_0|^2}{2!} .$$

Предположим, далее, что

$$\left\| y^{[k]}(t) - y^{[k-1]}(t) \right\| \le L^{k-1} F \frac{|t - t_0|^k}{k!} .$$

Тогда с учетом (5)

$$\left\| y^{[k+1]}(t) - y^{[k]}(t) \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, y^{[k]}(\tau)) - f(\tau, y^{[k-1]}(\tau))] d\tau \right\| \le L^k F \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} .$$

Итак, применив метод индукции, мы доказали, что оценка k-го члена ряда (10) имеет вид:

$$\left\| y^{[k]}(t) - y^{[k-1]}(t) \right\| \le L^{k-1} F \frac{|t - t_0|^k}{k!}$$

или

$$\left\| y^{[k]}(t) - y^{[k-1]}(t) \right\| \le \frac{F}{L} \frac{(L|t - t_0|)^k}{k!} \le c_k ,$$

где

$$c_k = \frac{F}{L} \frac{(LT_0)^k}{k!} ,\ \ k = 1,2,\ldots .$$

В результате нами получен мажорирующий числовой ряд для функционального ряда (10):

$$\left\| y^0 \right\| + \frac{F}{L} \left(\frac{LT_0}{1!} + \frac{(LT_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{(LT_0)^k}{k!} + \ldots \right) = \left\| y^0 \right\| + \frac{F}{L} (e^{LT_0} - 1) ,$$

что доказывает равномерную сходимость на отрезке Пеано функционального ряда (10) к некоторой вектор-функции y(t), которая непрерывна, так как члены ряда (10), согласно (6), непрерывны.

Опираясь на равномерную сходимость $y^{[k]}(t)$ к y(t) при $k\to\infty$, выполним предельные переходы в неравенствах (7), и в выражении k-го члена последовательности (6), имеющего вид:

$$y^{[k]}(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{[k-1]}(\tau))\, d\tau .$$

В результате предельного переходе получаем интегральное уравнение:

$$y(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau. \qquad (11)$$

При этом, как это следует из (7), для y(t) выполняется неравенство:

$$\left\| y(t) - y^0 \right\| \le R, \quad \left| t - t_0 \right| \le T_0 . \qquad (12)$$

Таким образом, y(t) в интегральном уравнении (11) принадлежит области определения вектор-функции f(t,y).

Покажем, что вектор-функция y(t), определяемая из интегрального уравнения (11), является решением задачи Коши (1). Действительно, после дифференцирования (11) по t получаем:

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)).$$

Кроме того, как следует из (11), $y(t_0) = y^0$. Следовательно, предельная вектор-функция y(t), представляющая сумму ряда (9), является решением задачи Коши (1). А поскольку $f(t, y(t))$ - непрерывна, то непрерывна и производная вектор-функции y (t). Итак, нами доказано существование на отрезке Пеано непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши, удовлетворяющее неравенству (12).

Переходим к доказательству единственности решения. Предположим, что решение задачи Коши (1) не единственно. Пусть вектор-функции z(t) и w(t) – два различных решения одной и той же задачи Коши:

$$\frac{dz}{dt}(t) \equiv f(t, z(t)), \quad z(t_0) = y^0.$$

$$\frac{dw}{dt}(t) \equiv f(t, w(t)), \quad w(t_0) = y^0 .$$

Составим разность этих решений. Вычитая из первого тождества второе, получаем:

$$\frac{d}{dt}[z(t) - w(t)] = f(t, z(t)) - f(t, w(t)), \quad z(t_0) - w(t_0) = 0.$$

Согласно лемме Адамара существует непрерывная матричная функция A(t) такая, что (см.(2),(3))

$$f(t,z(t)) - f(t,w(t)) = A(t)(z(t) - w(t)), \quad \|A(t)\| \le L. .$$

Таким образом, можно считать, что разность u(t) = z)(t) – w(t) является решением задачи Коши для линейной однородной системы уравнений с нулевым вектором начальных данных:

$$\frac{du}{dt} = A(t)u, \ u = 0 \text{ .при } t = t_0. \qquad (13)$$

Но по тереме существования и единственности (см. n3, лекция 2) задача Коши (13) имеет только тривиальное решение: u(t) ≡ 0, т.е. z(t) ≡ w(t). Полученное противоречие доказывает единственность решения задачи Коши (1). **Теорема доказана.**

Замечание. Если в формулировке теоремы Пикара оставить только условия 1^0 и 2^0, согласно которым в области B вектор-функция f(t, y) непрерывна и, следовательно, ограничена, то, как утверждает теорема Пеано, на отрезке Пеано существует решение задачи Коши (1). Но при этом не гарантируется единственность решения.

Например, задача Коши для скалярного уравнения:

$$y \ge 0,$$
$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y}\ , \ y = 0 \text{ при } t = 0,$$

имеет два решения: $y(t) \equiv 0$ и $y(t) = t^2/4$. Неединственность обусловлена тем, что производная функции f(y)= $\sqrt{y}$ не удовлетворяет условию 3^0, так как не ограничена в окрестности точки y = 0.

4. Задача Коши для нелинейного дифференцильного уравнения высокого порядка.

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференцильного уравнения высокого порядка вида:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}})$$
$$x = y_1^0, \ \frac{dx}{dt} = y_2^0 \ ,..., \ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = y_n^0 \text{ при t = } t_0, \qquad (14)$$

где $F(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}})$ - заданная функция указанных аргументов, $y_1^0, \ y_2^0, ..., y_n^0$ - начальные данные. Если для удобства ввести обозначения

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{dx}{dt}, ..., y_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, \tag{15}$$

и считать, что $y_1, y_2, ..., y_n$ - компоненты векторного аргумента y, так что

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}) \equiv F(t, y_1, y_2, ..., y_n) \equiv F(t, y),$$

а $y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$ - компоненты вектора y^0, то задача Коши (14) примет вид:

$$\frac{dy_n}{dt} = F(t, y), \quad y = y^0 \text{ при } t = t_0. \tag{16}$$

Мы будем полагать, что функция $F(t, y)$ непрерывна в области B,

$$B = \{ |t - t_0| \le T, \ \|y - y^0\| \le R \}$$

и, кроме того, $F(t, y)$ имеет в области B непрерывные частные производные по $y_1, y_2, ..., y_n$.

Поступая точно также, как и при преобразовании задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения высокого порядка (см. лекцию 6), поставим в соответствие (14) следующую задачу Коши для системы уравнений:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_3$$

……………..

$$\frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n$$

$$\frac{dy_n}{dt} = F(t, y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$y_1 = y_1^0, \ y_2 = y_2^0, ..., y_n = y_n^0 \text{ при } t = t_0.$$

или, используя векторное представление,

$$\frac{dy}{dt} = \bar{f}(t, y), \quad y = y^0 \text{ при } t = t_0, \tag{17}$$

где

$$\overline{f}(t,y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ F(t,y) \end{bmatrix}.$$

При этом, как легко убедиться, первая компонента вектор-функции $y(t)$, дающей решение задачи Коши (17), является решением задачи Коши (14). И наоборот. Если x(t) – решение задачи Коши (14), то вектор-функция y(t) с компонентами

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \dots\dots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{d^2x}{dt^2}(t) \\ \dots\dots \\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t) \end{bmatrix}$$

будет решением задачи Коши (17).

Очевидно, вектор-функция $\overline{f}(t,y)$ удовлетворяет условиям $1^0,2^0,3^0$ локальной теоремы Пикара. В частности, с учетом обозначений (15)

$$\left\|\overline{f}(t,y)\right\| = \sqrt{y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_{n-1}^2 + F^2(t,y)} \le F,$$

а матричная функция

$$\overline{f}_y(t,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 0 & 1 \\ \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{dy_2} & \frac{\partial F}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial F}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

непрерывна. Поэтому задача Коши (17) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение на отрезке Пеано, не выходящее из области B. То же самое мы можем утверждать и в отношении решения x(t) задачи Коши (14), которое на отрезке Пеано

$$|t - t_0| \le T_0 = \min(T, \frac{R}{F}),$$

принадлежит классу C^n, как это следует из уравнения (16) в силу непрерывности его правой части.

Локальная теорема Пикара гарантирует существование решения задачи Коши (1) на отрезке Пеано, Однако, важной проблемой является определение условий, при которых решение задачи Коши существует при всех t > t_0.

Приведем еще один пример, иллюстрирующий утверждения локальной теоремы Пикара. Рассмотрим задачу Коши для скалярного уравнения:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + t^2 + y^2,\ y = 0 \ \text{при} \ t = 0 . \qquad (18)$$

Здесь функция $f(t, y)$ удовлетворяет всем условиям локальной теоремы Пикара в любой конечной области $(t, y) \in B,\ B = \{|\,t\,| \le T,\ |\,y\,| \le R\,\}$: $f(t, y)$ - непрерывна и ограничена константой F:

$$|f(t, y)| \le F = 1 + T^2 + R^2.$$

Кроме того, непрерывна и ограничена и производная:

$$|f_y(t, y)| \le L = 2R.$$

Может показаться, что в этом случае величина отрезка, на котором существует решение задачи Коши $y(t)$, будет также произвольной, а не определяться значением отрезка Пеано:

$$|\,t\,| \le T_0 = \min(T, R/F) .$$

Однако, как мы убедимся, это не так.

Пусть, например, T = 2, R = 5. При этом F = 1 + 2^2 + 5^2 = 30. Отсюда

$$T_0 = \min(2,\ \frac{5}{30}) = \frac{1}{6}.$$

Попытаемся увеличить размеры области B: T = 7, R = 10, F = 1 + 7^2 + 10^2 = 150, В результате размер отрезка Пеано стал еще меньше:

$$T_0 = = \min(7,\ \frac{10}{150}) = \frac{1}{15}.$$

Рассмотрим решение $y(t)$ задачи Коши (18), например, при положительных значениях t и покажем, что решение не может быть определено при всех t > 0. Действительно, из тождества

$$\frac{dy}{dt}(t) \equiv 1 + t^2 + y^2(t)$$

следует неравенство:

$$\frac{dy}{dt}(t) \ge 1 + y^2(t),\ ,$$

которое может быть переписано в виде:

$$\frac{1}{1+y^2(t)}\frac{dy}{dt}(t) = \frac{d}{dt}arctg(y(t)) \geq 1.$$

Предположим, что непрерывно дифференцируемое решение $y(t)$, определено при $0 \leq t \leq t_*$, $0 < t_* < \frac{\pi}{2}$. Проинтегрируем обе части неравенства от 0 до t_* с учетом, что $y(0)=0$:

$$arctg(y(t_*)) - arctg(y(0)) = arctg(y(t_*)) \geq t_*,$$

т.е.

$$y(t_*) \geq tg(t).$$

Отсюда следует, что правая граница отрезка по t, на котором определено решение $y(t)$, должна быть меньше, чем $\pi/2$.

В дальнейшем достаточные условия существования решения задачи Коши при всех t > 0 будут рассмотрены нами в частном случае для так называемых автономных систем, т.е. систем дифференциальных уравнений, у которых правые части не зависят от аргумента t.