Лекция 4

п5. Пространство решений однородной системы дифференциальных уравнений.

Мы приступаем к полному описанию всевозможных решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y\,,\ \ A(t) \in \text{C([a,b])}. \qquad (1)$$

которое содержится в теореме о пространстве решений (1). Как мы увидим, доказательство теоремы основывается на существовании единственного решения задачи Коши для векторного уравнеия (1).

Предварительно напомним понятие линейной независимости (зависимости) векторов в n-мерном векторном пространстве.

Векторы $y^{[1]}$, $y^{[2]}$,…, $y^{[k]}$ в n-мерном векторном пространстве линейно независимы, если их линейная комбинация $C_1y^{[1]} + C_2\,y^{[2]} +\ldots+ C_ky^{[k]}$ равна нулю только в том случае, когда равны нулю все коэффициенты $C_1, C_2,\ldots, C_k$. Если же равенство нулю линейной комбинации возможно, когда среди коэффицентов $C_1, C_2,\ldots, C_k$ есть отличные от нуля, то в этом случае векторы $y^{[1]}$, $y^{[2]}$,…, $y^{[k]}$ - линейно зависимы.

Аналогичные определения имеют место и для вектор-функций. Если линейная комбинация вектор-функций $C_1y^{[1]}(t)+ C_2\,y^{[2]}(t) +\ldots+ C_ky^{[k]}(t)$, $t\in [a,b]$, тождественно равна нулю при всех t только при равенстве нулю всех коэффициентов $C_1, C_2,\ldots, C_k$, то вектор-функции $y^{[1]}(t)$, $y^{[2]}(t)$,…, $y^{[k]}(t)$ линейно независимы. В противном случае вектор – функции линейно зависимы.

Теорема 1. Пусть A(t) – (n x n) – матричная функция , $A(t) \in$ C([a,b]). Тогда решения системы (1) образуют линейное пространство размерности n.

Доказательство. Вначале покажем, что пространство решений системы (1) линейное. Пусть вектор-функции u(t) и v(t) - решения (1), т.е.

$$\frac{du}{dt}(t) \equiv A(t)u(t) \ \text{ и } \ \frac{dv}{dt}(t) \equiv A(t)v(t).$$

Составим из них линейную комбинацию с коэффициентами α и β :

$$y(t) = \alpha u(t) + \beta v(t).$$

Имеем:

$$\frac{dy}{dt}(t) = \alpha\frac{du}{dt}(t) + \beta\frac{dv}{dt}(t) = \alpha A(t)u(t) + \beta A(t)v(t) = A(t)(\alpha u(t) + \beta v(t)) = A(t)y(t).$$

Таким образом, линейная комбинация также является решением системы (1), что и доказывает линейность пространства решений.

Следующий шаг состоит в доказательстве существования n линейно независимых решений векторного уравнения (1). Рассмотрим задачу Коши для матричного уравнения:

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y,\ \ Y = B \ \text{ при } t = t_0,\ \ t_0\in [a,b]. \qquad (2)$$

Пусть Y(t) – решение (2). Обозначим через $y^{[k]}(t)$ и B_k, k = 1,2,…,n, столбцы матриц Y (t) и B соответственно:

$$Y(t) = [y^{[1]}(t)\ y^{[2]}(t) \dots\ y^{[n]}(t)], \quad B = [B_1\ B_2\ \dots\ B_n].$$

При этом столбцы Y(t) являются решениями серии задач Коши:

$$\frac{dy^{[k]}}{dt} = A(t)y^{[k]}, \quad y^{[k]} = B_k \text{ при } t = t_0, \quad k = 1,2,\dots, n. \qquad (3)$$

Покажем, что столбцы Y(t) линейно независимы, если B – невырожденная матрица.

Предположим обратное. Пусть $y^{[1]}(t)$, $y^{[2]}(t)$,… ,$y^{[n]}(t)$ – n решений (1) - линейно зависимы. Составим из них линейную комбинацию

$$y(t) = C_1 y^{[1]}(t) + C_2 y^{[2]}(t) + \dots + C_k y^{[n]}(t),$$

выбрав коэффициенты комбинации C_1, C_2, …, C_n таким образом, чтобы при некотором значении $t = t_*$, $t_* \neq t_0$, линейная комбинация обращалась в 0, хотя среди ее коэффициентов есть отличные от нуля:

$$y(t_*) = C_1 y^{[1]}(t_*) + C_2 y^{[2]}(t_*) + \dots + C_k y^{[n]}(t_*) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} |C_i| \neq 0.$$

В силу линейности пространства решений вектор-функция y(t) также будет решением векторного (1). Отсюда следует, что y(t) - решение задачи Коши с нулевыми начальными данными при $t = t_*$

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y = 0 \text{ при } t = t_*.$$

Следовательно, единственным решением задачи Коши будет: $y(t) \equiv 0$ при всех t, в том числе и при $t = t_0$:

$$y(t_0) = C_1 y^{[1]}(t_0) + C_2 y^{[2]}(t_0) + \dots + C_k y^{[n]}(t_0) = 0,$$

или, полагая $C_1\ C_2 \dots C_n$ компонентами вектора C,

$$y(t_0) = Y(t_0)C = 0.$$

Так как Y(t) – решение (2), то $Y(t_0) = B$, причем $\det(B) \neq 0$. Поэтому при $t = t_0$ мы имеем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора C с невырожденной матрицей B, которая имеет только тривиальное решение C = 0. Но ранее мы полагали, что не все компоненты вектора C равны 0. Полученное противоречие доказывает, что $y^{[1]}(t)$, $y^{[2]}(t)$,…,$y^{[n]}(t)$ – линейно независимые решения.

Итак, решение Y(t) задачи Коши (2) с невырожденной матрицей начальных данных определяет n линейно независимых решений (1) в виде вектор-столбцов матричной функции Y(t).

Нам осталось показать, что n линейно независимых решений образуют базис в пространстве решений (1), т.е. любое другое решение будет линейной комбинацией базисных решений и, следовательно, совокупность (n+1) решений (1) всегда представляется линейно зависимыми вектор-функциями. Пусть $y^{[1]}(t)$, $y^{[2]}(t)$, … , $y^{[n]}(t)$, $y^{[n+1]}(t)$ – решения (1). Тогда при $t = t_0$ мы имеем совокупность (n+1) векторов в n-мерном векторном пространстве. Следовательно, векторы $y^{[1]}(t_0)$, $y^{[2]}(t_0)$, … , $y^{[n]}(t_0)$, $y^{[n+1]}(t_0)$ обязаны быть линейно зависимыми. При этом можно указать такие коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$, среди которых есть отличные от нуля, что

$$C_1 y^{[1]}(t_0) + C_2 y^{[2]}(t_0) + \ldots + C_n y^{[n]}(t_0) + C_{n+1} y^{[n+1]}(t_0) = 0$$

Обозначим через y(t) линейную комбинацию решений:

$$y(t) = C_1 y^{[1]}(t) + C_2 y^{[2]}(t) + \ldots + C_n y^{[n]}(t) + C_{n+1} y^{[n+1]}(t),$$

В силу линейности пространства решений вектор-функция y(t) также будет решением векторного уравнения (1). Отсюда следует, что y(t), как решение задачи Коши с нулевыми начальными данными,

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y = 0 \text{ при } t = t_0, \tag{4}$$

тождественно равна 0, т.е.

$$C_1 y^{[1]}(t) + C_2 y^{[2]}(t) + \ldots + C_n y^{[n]}(t) + C_{n+1} y^{[n+1]}(t) \equiv 0, \ t \in [a,b].$$

Поскольку среди коэффициентов линейной комбинации есть отличные от нуля, то это означает линейную зависимость (n+1) решений (1). **Теорема доказана.**

Теорема 2. Пусть $y^{[1]}(t), y^{[2]}(t), \ldots, y^{[k]}(t)$, $t \in [a,b]$, - решения векторного уравнения (1), причем при $t = t_0$ они линейно зависимы. Тогда они линейно зависимы при всех $t \in [a,b]$.

Доказательство. Действительно, по условию

$$\sum_{i=1}^{k} C_i y^{[i]}(t_0) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} |C_i| \neq 0.$$

Следовательно, линейная комбинация решений

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i y^{[i]}(t)$$

будет решением задачи Коши (4), т.е. $y(t) \equiv 0$. В результате, имеет место тождество:

$$\sum_{i=1}^{k} C_i y^{[i]}(t) \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^{k} |C_i| \neq 0,$$

определяющее линейную зависимость решений. **Теорема доказана.**

Замечание. Аналогичным образом доказывается линейная независимость решений векторного уравнения (1), если они линейно независимы при $t = t_0$. Таким образом, линейная зависимость, или линейная независимость решений определяется их линейной зависимостью, или линейной независимостью при одном значении t. В частности, если n решений векторного уравнения (1) – вектор-функции $y^{[1]}(t), y^{[2]}(t),\ldots, y^{[n]}(t)$ - линейно независимы при некотором значении $t = t_0$, то они линейно независимы при всех $t \in [a,b]$, т.е. $\det([y^{[1]}(t), y^{[2]}(t),\ldots, y^{[n]}(t)]) \neq 0$.

Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица решений.

Определение 1. Линейно независимые решения $y^{[1]}(t), y^{[2]}(t),\ldots, y^{[n]}(t)$ векторного уравнения (1) с (n x n) - матричной функцией $A(t) \in C([a,b])$ называются фундаментальной системой решений (Ф.С.Р.), а матричная функция $Y(t) = [y^{[1]}(t)\ y^{[2]}(t) \ldots y^{[n]}(t)]$ столбцы которой образуют Ф.С.Р., назавается фундаментальной матрицей решений (Ф.М.Р.).

Доказательство теоремы 1 содержит способ построения Ф.С.Р. Для этого нужно найти решение серии задач Коши (3), векторы начальных данных которой образуют невырожденную матрицу. Или, что то же самое, найти решение задачи Коши (2) с невырожденной матрицей начальных данных.

Определение 2. Линейная комбинация y(t) вектор-функций $y^{[1]}(t)\ y^{[2]}(t)\ldots y^{[n]}(t)$, образующих Ф.С.Р., с произвольными коэффициентами $C_1, C_2, \ldots, C_n$,

$$y(t) = C_1y^{[1]}(t) + C_2y^{[2]}(t)+\ldots + C_ny^{[n]}(t),$$

называется общим решением векторного уравнения (1). Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - компоненты вектора C. Тогда общее решение можно представить в виде:

$$y(t) = Y(t)C,$$

где $Y(t) -$ Ф.М.Р.

Из общего решения векторного уравнения (1) следует решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y = y_0 \quad \text{при} \quad t = t_0. \qquad (5)$$

Полагая в общем решении $t = t_0$, получаем для определения компонент вектора C систему линейных алгебраических уравнений:

$$Y(t_0)C = y^0,$$

с невырожденной матрицей $Y(t_0)$. В результате решение (5) принимает вид:

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)y^0.$$

Приведем примеры Ф.М.Р.

1. Согласно определению матричная экспонента $Y(t) = e^{tA}$ является решением задачи Коши:

$$\frac{dY}{dt} = AY, \quad Y = E \quad \text{при} \quad t = 0,$$

Так как $\det(Y(0)) = 1 \neq 0$, то

$$e^{tA} \text{ – Ф.М.Р. } \frac{dy}{dt} = Ay \ .$$

2.Пусть J – жорданова форма матрицы A, $A = TJT^{-1}$, или $AT = TJ$. Рассмотрим матричную функцию $V(t) = Te^{tJ}$. Имеем:

$$\frac{dV}{dt}(t) = TJe^{tJ} = ATe^{tJ} = AV(t), \ V(0) = T.$$

т.е. V(t) – решение задачи Коши для матричного уравнения с матрицей A. Так как $\det(V(0) = \det(T) \neq 0$, то

$$Te^{tJ} \text{ – Ф.М.Р. } \frac{dy}{dt} = Ay \ .$$

Приведем выражения столбцов матричной функции V(t):

$$V(t) = Te^{tJ} = [y^{[1]}(t) \ \ y^{[2]}(t) \ \dots \ y^{[n]}(t)],$$

которые по определению образуют Ф.С.Р. Пусть жорданова форма, состоит из p стандартных жордановых n_k x n_k - клеток J_k, $k = 1, 2, \dots, p$, $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & J_p \end{bmatrix},$$

При перемножении матрицы $T = [T_1, T_2, \dots, T_n]$, состоящей из собственных и присоединенных векторов матрицы A, и матричной экспоненты жордановой формы,

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & e^{tJ_p} \end{bmatrix},$$

ограничимся выражениями $y^{[i]}(t)$, $i = 1,2,\dots, n_1$, которые соответствуют жордановой $(n_1 \times n_1)$-клетке J_1. При этом матричная экспонента J_1 имеет вид:

$$e^{tJ_1} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \frac{te^{\lambda_1 t}}{1!} & \frac{t^2 e^{\lambda_1 t}}{2!} & \frac{t^3 e^{\lambda t_1}}{3!} & \dots & \frac{t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t}}{(n_k-1)!} \\ & e^{\lambda_1 t} & \frac{te^{\lambda_k t}}{1!} & \frac{t^2 e^{\lambda_1 t}}{2!} & \dots & \frac{t^{n_1-2} e^{\lambda_1 t}}{(n_k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & e^{\lambda_1 t} & \frac{te^{\lambda_1 t}}{1!} \\ & & & \dots & & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix},$$

где λ_1 - собственное число матрицы A кратности m_1, $m_1 \geq n_1$. В результате получаем:

$$\begin{aligned} y^{[1]}(t) &= e^{\lambda_1 t} T_1 \\ y^{[2]}(t) &= e^{\lambda_1 t}(T_2 + \frac{t}{1!} T_1) \\ y^{[3]}(t) &= e^{\lambda_1 t}(T_3 + \frac{t}{1!} T_2 + \frac{t^2}{2!} T_1) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{[n_1]}(t) &= e^{\lambda_1 t}(T_{n_1} + \frac{t}{1!} T_{n_1-1} + \frac{t^2}{2!} T_{n_1-2} + \dots + \frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!} T_1). \end{aligned} \qquad (6)$$

Если $m_1 > n_1$, то тому же λ_1 будут отвечать одномерные жордановы клетки $J_2, J_3, \dots, J_{m_1-n_1}$, для которых матричными экспонентами будет обычная скалярная экспонента $e^{\lambda_1 t}$, т.е.

$$y^{[n_1+1]}(t) = e^{\lambda_1 t} T_{n_1+1},\ y^{[n_1+2]}(t) = e^{\lambda_1 t} T_{n_1+2},\ \dots,\ y^{[m_1]}(t) = e^{\lambda_1 t} T_{m_1}. \qquad (7)$$

Согласно блочно-диагональной структуре жордановой формы за этими клетками следуют жордановы клетки, отвечающие собственному числу λ_2 кратности m_2. При этом вид вектор-функций $y^{[m_1+1]}(t)$, $y^{[m_1+2]}(t), \dots, y^{[m_2]}(t)$ вполне аналогичен (6)-(7). Напомним, что размеры стандартных жордановых клеток определяются рангом матрицы (A - λE), где λ - собственное число (см. лекцию 3)).

3. Рассмотрим пример из лекции 3, в котором жорданова форма матрицы A имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & & \\ . & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \lambda_3 & & & \\ & & & & & \lambda_3 & & \\ & & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Имеем:

$$V(t) = Te^{tJ} = [y^{[1]}(t)\ y^{[2]}(t)\ y^{[3]}(t)\ y^{[4]}(t)\ y^{[5]}(t)\ y^{[6]}(t)\ y^{[7]}(t)\ y^{[8]}(t)],$$

где

$$Te^{tJ} = [\ T_1\ T_2\ T_3\ T_4\ T_5\ T_6\ T_7\ T_8] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & & & & & \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ . & & & e^{\lambda_2 t} & & & & \\ & & & & e^{\lambda_3 t} & & & \\ & & & & & e^{\lambda_3 t} & & \\ & & & & & & e^{\lambda_3 t} & te^{\lambda_3 t} \\ & & & & & & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$$

Отсюда следуют выражения вектор-функций, образующих Ф.С.Р.:

$$y^{[1]}(t) = e^{\lambda_1 t} T_1\ , \qquad y^{[5]}(t) = e^{\lambda_1 t} T_5$$
$$y^{[2]}(t) = e^{\lambda_1 t} (T_2 + tT_1)\ , \qquad y^{[6]}(t) = e^{\lambda_3 t} T_6$$
$$y^{[3]}(t) = e^{\lambda_1 t} (T_3 + tT_2 + \frac{t^2}{2} T_1)\ , \qquad y^{[7]}(t) = e^{\lambda_3 t} T_7$$
$$y^{[4]}(t) = e^{\lambda_2 t} T_4\ , \qquad y^{[8]}(t) = e^{\lambda_3 t} (T_8 + tT_7)\ .$$

Теорема 3. Пусть Y(t) – Ф.М.Р. векторного уравнения (1). Тогда ее любая другая Ф.М.Р. V(t) имеет вид: V(t) = Y(t)B, где B – постоянная невырожденная матрица.

Доказательство. Вначале покажем, что V(t) = Y(t)B, det(B) $\neq$ 0, – Ф.М,Р. векторного уравнения (1). Действительно, при постоянной матрице B имеем:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \frac{dY}{dt}(t)B = A(t)Y(t)B = A(t)V(t)$$

Как известно (см замечание к теореме 2), столбцы Y(t) линейно независимы при любом t $\in$[a,b] , т.е det(Y(t)) $\neq$ 0. А так как det(B) $\neq$0, то и det(V(t)) = det(Y(t))det(B) $\neq$0. Следовательно, V(t) – Ф.М.Р.

Докажем теперь, что матрица B обязана быть постоянной. Пусть Y(t) и V(t) – Ф.М.Р. векторного уравнения (1). Составим производную матричной функции U(t) = Y^{-1}(t)V(t). Имеем:

$$\frac{dU}{dt}(t) = \frac{dY^{-1}}{dt}(t)V(t) + Y^{-1}(t)\frac{dV}{dt}(t) = \frac{dY^{-1}}{dt}(t)V(t) + Y^{-1}(t)A(t)V(t).$$

По определению $Y^{-1}(t)Y(t) = E.$ Поэтому

$$\frac{d}{dt}Y^{-1}(t)Y(t) = \frac{dY^{-1}}{dt}(t)Y(t) + Y^{-1}(t)\frac{dY}{dt}(t) = \frac{dY^{-1}}{dt}(t)Y(t) + Y^{-1}(t)A(t)Y(t) . \equiv 0.$$

Умножив справа обе части тождества

$$\frac{dY^{-1}}{dt}(t)Y(t) + Y^{-1}(t)A(t)Y(t). \equiv 0$$

на $Y^{-1}(t)$ получаем:

$$\frac{dY^{-1}}{dt}(t) + Y^{-1}(t)A(t) \equiv 0 \text{ , т.е. } \frac{dY^{-1}}{dt}(t) \equiv -Y^{-1}(t)A(t).$$

Следовательно,

$$\frac{dU}{dt}(t) = \frac{dY^{-1}}{dt}(t)V(t) + Y^{-1}(t)A(t)V(t) = -Y^{-1}(t)A(t)V(t) + Y^{-1}(t)A(t)V(t) \equiv 0.$$

т.е U(t) – постоянная матрица. Таким образом, любые две фундаментальные матрицы решений Y(t) и V(t) связаны соотношением: V(t) = Y(t)B, где B – постоянная невырожденная матрица. **Теорема доказана.**

Из теоремы 3, например, сразу следует, что после умножения справа матричную экспоненту $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$ на матрицу T мы получаем матричную функцию $V(t) = Te^{tJ}$, которая, как и матричная экспонента, является Ф.М.Р.

Формула Лиувилля – Остроградского.

Определение. Определитель матричной функции Y(t),

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & ... & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & ... & y_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & ... & y_{nn}(t) \end{bmatrix} = [y^{[1]}(t)\ y^{[2]}(t) \dots y^{[n]}(t)],$$

являющейся решением матричного уравнения (2), называется определителем Вронского, или вронскианом.

В дальнейшем мы будем использовать для обозначения вронскиана функцию w (t):

$$w(t) = \det(Y(t)) = \det [y^{[1]}(t)\ y^{[2]}(t) \dots y^{[n]}(t)],$$

Определение вронскиана не связано с линейной зависимостью (независимостью) столбцов Y(t).

Теорема 4. Пусть $y^{[1]}(t)$, $y^{[2]}(t)$, … , $y^{[n]}(t)$ – решения векторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \ A(t) \in C([a,b]).$$

с (n x n) – матричной функцией $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, i,j = 1,2,…,n, а $w(t) = \det([y^{[1]}(t)\ y^{[2]}(t) \dots y^{[n]}(t)]$ – определитель Вронского. Тогда имеет место формула Лиувилля-Остроградского:

$$w(t) = w(t_0)\exp[\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))ds], \qquad (8)$$

где

$$Tr(A(t)) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + ... + a_{nn}(t)$$ - след A(t).

Доказательство. Непосредственно проверяется, что функция w(t), определяемая по формуле (8), является решением задачи Коши:

$$\frac{dw}{dt} = Tr(A(t))w, \ w = w(t_0) \text{ при } t = t_0. \qquad (9)$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к проверке того, что решением (9) является вронскиан.

С этой целью составим выражение для производной определителя Вронского:

$$\frac{dw}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\det\begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & ... & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & ... & y_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & ... & y_{nn}(t) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{dy_{11}}{dt}(t) & \frac{dy_{12}}{dt}(t) & ... & \frac{dy_{1n}}{dt}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & ... & y_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & ... & y_{nn}(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \det\begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & ... & y_{1n}(t) \\ \frac{dy_{12}}{dt}(t) & \frac{dy_{22}}{dt}(t) & ... & \frac{dy_{2n}}{dt}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & ... & y_{nn}(t) \end{bmatrix} + \ldots + \det\begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & ... & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & ... & y_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{dy_{n1}}{dt}(t) & \frac{dy_{2n}}{dt}(t) & ... & \frac{dy_{nn}}{dt}(t) \end{bmatrix} =$$

$$= w_1(t) + w_2(t) + \ldots + w_n(t).$$

Здесь $w_k(t)$ – определитель матрицы Y(t), у которой k-я строка заменена на строку из производных функций, образующих ее k-ю строку.

Покажем, что $w_k(t) = a_{kk}(t)w(t)$. Заметим, что определитель

$$\det\begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & ... & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & ... & y_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{kk}(t)y_{k1}(t) & a_{kk}(t)y_{k2}(t) & ... & a_{kk}(t)y_{kn}(t) \\ ... & ... & ... & . \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & ... & y_{nn}(t) \end{bmatrix} = a_{kk}(t)w(t)$$

не изменится, если умножить оставшиеся строки матрицы соответственно на $a_{kj}(t)$, j = 1,2,…, n , $j \neq k$, и составить из них и k-ой строки линейную комбинацию, заменив ею k-ю строку. В результате получаем:

$$a_{kk}(t)w(t) = \det\begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1(t) & v_2(t) & \dots & v_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & . \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

где

$$v_1(t) = a_{k1}(t)y_{11}(t) + a_{k2}(t)y_{21}(t) + \dots + a_{kk}(t)y_{k1}(t) + \dots + a_{kn}(t)y_{n1}(t)$$

$$v_2(t) = a_{k1}(t)y_{12}(t) + a_{k2}(t)y_{22}(t) + \dots + a_{kk}(t)y_{k2}(t) + \dots + a_{kn}(t)y_{n2}(t)$$

…………………………………………………………………………..

$$v_n(t) = a_{k1}(t)y_{1n}(t) + a_{k2}(t)y_{2n}(t) + \dots + a_{kk}(t)y_{kn}(t) + \dots + a_{kn}(t)y_{nn}(t)$$

С другой стороны, из тождества

$$\frac{dY}{dt}(t) \equiv A(t)Y(t)$$

следуют выражения производных элементов k- ой строки матричной функции Y(t):

$$\frac{dy_{k1}}{dt}(t) = a_{k1}(t)y_{11}(t) + a_{k2}(t)y_{21}(t) + \dots + a_{kn}(t)y_{n1}(t)$$

$$\frac{dy_{k2}}{dt}(t) = a_{k1}(t)y_{12}(t) + a_{k2}(t)y_{22}(t) + \dots + a_{kn}(t)y_{n2}(t)$$

……………………………………………………………..

$$\frac{dy_{kn}}{dt}(t) = a_{k1}(t)y_{1n}(t) + a_{k2}(t)y_{2n}(t) + \dots + a_{kn}(t)y_{nn}(t) \quad .$$

Таким образом, в (10)

$$v_1(t) = \frac{dy_{k1}}{dt}(t), \quad v_2(t) = \frac{dy_{k2}}{dt}(t), \dots, \ v_n(t) = \frac{dy_{kn}}{dt}(t),$$

и, следовательно, $a_{kk}(t)w(t) = w_k(t)$. В результате имеем:

$$\frac{dw}{dt}(t) = w_1(t)+w_2(t)+\dots+w_n(t) = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)]\, w(t) = Tr(A(t))\, w(t),$$

т.е. w(t) действительно является решением задачи Коши (9). **Теорема доказана.**

Отметим, что согласно формуле Лиувилля – Остроградского определитель Вронского равен нулю (отличен от нуля) при всех t, если он равен нулю (отличен от нуля) при каком-нибудь значении $t = t_0$, что свидетельствует о линейной зависимости (независимости) $y^{[1]}(t)$, $y^{[2]}(t)$, … , $y^{[n]}(t)$ – решений векторного уравнения (1).

Рассмотрим пример с использованием формулы Лиувилля-Остроградского. Пусть Y(t) – матричная экспонента матрицы A. Так как A – постоянная матрица, то

$$w(t) = \det(e^{tA}) = w(0)e^{tTr(A)} = e^{tTr(A)}.$$

Полагая здесь t = 1, получаем:

$$\det(e^{A}) = e^{Tr(A)}.$$

.