Лекция 3

п4. Однородные линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента.

Рассмотрим частный случай, в котором задача Коши формулируется для однородной системы дифференциальных уравнений с постоянной (n x n)-матрицей коэффициентов:

$$\frac{dy}{dt} = Ay\ , \quad y = y^0 \quad \text{при } t = t_0,$$

Ранее было показано, что задача Коши имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение y = y(t). Поскольку A – постоянная матрица, то решение определено на любом конечном отрезке по t. Нам предстоит убедиться, что при этом y(t) принадлежит классу сколь угодно число раз дифференцируемых функций и что y(t) можно представить в виде бесконечного равномерно сходяшегося ряда.

Принимая во внимание, что правые части системы не зависят от t, мы можем, не теряя общности, считать, что вектор начальных данных задается при t = 0. Действительно, после замены аргумента $t = t_0 + \tau$ задача Коши принимает вид:

$$\frac{dy}{d\tau} = Ay\ , \quad y = y^0 \quad \text{при } \tau = 0.$$

В дальнейшем мы будем считать, что эта замена уже проведена, полагая $t_0 = 0$.

Предположим, что вектор-функция y(t) имеет производные любого порядка. Поскольку y(t) – решение Коши, то

$$\frac{dy}{dt}(t) = Ay(t), \quad \frac{d^2y}{dt^2}(t) = A\frac{dy}{dt}(t) = A^2y(t), \ldots\ldots, \ \frac{d^ky}{dt^k}(t) = A^ky(t), \ldots.$$

Используя эти выражения, запишем формальное представление y(t) в виде ряда Тейлора в окрестности $t = t_0 = 0$. Имеем:

$$y(t) = y(0) + \frac{t}{1!}\frac{dy}{dt}(0) + \frac{t^2}{2!}\frac{d^2y}{dt^2}(0) + \ldots\ldots\frac{t^k}{k!}\frac{d^ky}{dt^k}(0) + \ldots\ldots =$$

$$= y(0) + \frac{t}{1!}Ay(0) + \frac{t^2}{2!}A^2y(0) + \ldots\ldots\frac{t^k}{k!}A^ky(0) + \ldots\ldots .$$

Теорема. Вектор-функцию y(t), являющуюся решением задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = Ay\ , \quad y = y^0 \quad \text{при } t = 0, \tag{1}$$

где A – постоянная матрица, можно представить в виде функционального ряда

$$y(t) = y^0 + \frac{t}{1!}Ay^0 + \frac{t^2}{2!}A^2y^0 + \ \ldots\ldots\frac{t^k}{k!}A^ky^0 \ + \ldots\ldots \ , \qquad (2)$$

равномерно сходящегося на любом конечном отрезке $| t | \le T < \infty$. При этом y(t) имеет непрерывные производные любого порядка.

Доказательство. Равномерная сходимость ряда (2), члены которого – непрерывные вектор-функции, следует из оценки:

$$\left\| \frac{t^k}{k!}A^ky^0 \right\| \ \le \ \frac{|t|^k \, \|A\|^k}{k!}\left\|y^0\right\| \ \le \ \frac{(T\,\|A\|)^k}{k!}\left\|y^0\right\| \ .$$

Очевидно, числовой ряд

$$\left\|y^0\right\| + \frac{T\|A\|}{1!}\left\|y^0\right\| + \frac{(T\,\|A\|)^2}{2!}\left\|y^0\right\| + \ldots\ldots + \frac{(T\,\|A\|)^k}{k!}\left\|y^0\right\| +,,,,, \ ,$$

сходящийся к $e^{T\|A\|}\left\|y^0\right\|$, является мажорирующим, что и доказывает, согласно признаку Вейерштрасса, равномерную сходимость (2) к непрерывной вектор-функции y(t).

Рассмотрим теперь ряд, формально составленный из производных членов ряда (2):

$$\frac{dy}{dt}(t) \ = \ Ay^0 + \frac{t}{1!}A^2y^0 + \ \ldots\ldots\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^ky^0 \ + \ldots\ldots \ . \qquad (3)$$

Легко заметить, что в этом случае мажорирующий числовой ряд имеет вид:

$$\|A\|\left\|y^0\right\| + \frac{T\|A\|^2}{1!}\left\|y^0\right\| + \ldots\ldots + \frac{T^{k-1}\|A\|^k}{(k-1)!}\left\|y^0\right\| +,,,,, \ .$$

(Его сумма равна $\|A\|\, e^{T\|A\|}\left\|y^0\right\|$). Поэтому ряд (3) равномерно сходится к непрерывной вектор-функции. Следовательно, ряд (2) можно почленно дифференцировать, а его суммой является производная вектор-функции y(t).

Точно также можно убедиться, что в свою очередь и ряд (3) можно почленно дифференцировать, и т.д. В результате мы приходим к выводу, что ряд (2) почленно дифференцируем сколь угодное число раз.

Покажем, что вектор-функция y(t), представленная рядом (2), дает решение задачи Коши (1). Действительно,

$$Ay(t) = A\left(y^0 + \frac{t}{1!}Ay^0 + \frac{t^2}{2!}A^2y^0 + \ \ldots\ldots\frac{t^k}{k!}A^ky^0 \ + \ldots\ldots \right) =$$

$$= \ Ay^0 + \frac{t}{1!}A^2y^0 + \ \ldots\ldots\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^ky^0 \ + \ldots\ldots \ \equiv \frac{dy}{dt}(t) \ .$$

Кроме того, $y(0) = y^0$. **Теорема доказана.**

Матричная экспонента.

Представим решение задачи Коши (1) в виде:

$$y(t) = [E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \; .... \frac{t^k}{k!}A^k \; +....]\, y^0 ,$$

где E – единичная матрица. С использованием, как и ранее, признака Вейерштрасса показывается, что бесконечный ряд для матричных функции

$$Y(t) \; = \; E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \; .... \frac{t^k}{k!}A^k \; +.... \tag{4}$$

равномерно сходится к непрерывной матричной функции Y(t) на любом конечном отрезке по t. При этом формально составленный ряд для производных членов ряда (4),

$$\frac{dY}{dt}(t) = \; A + \frac{t}{1!}A^2 + \; ...... + . \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k \; +.... \tag{5}$$

равномерно сходится и, следовательно, ряд (4) допускает почленное дифференцирование. В свою очередь равномерно сходится ряд, составленный для производных членов ряда (5), и т.д. Таким образом, матричная функция Y(t) непрерывно дифференцируема сколь угодно число раз. Далее, легко проверить, что матричная функция Y(t) удовлетворяет условиям:

$$\frac{dY}{dt}(t) \equiv AY(t), \qquad Y(0) = E.$$

Таким образом, Y(t) является решением задачи Коши для матричного однородного дифференциального уравнения:

$$\frac{dY}{dt} = AY, \; Y = E \;\; \text{при} \;\; t = 0. \tag{6}$$

Определение. Матричная функция Y(t), определяемая либо равномерно сходящимся рядом (4) , либо как решение задачи Коши (6), называется матричной экспонентой матрицы A и обозначается как e^{tA}.

Если матричная экпонента известна, то решение задачи Коши (1) записывается в виде:

$$y(t) = e^{tA} y^0.$$

Свойства матричной экпоненты.

1. Матрица A и матричная экспонента матрицы A перестановочны: A$e^{tA} = e^{tA}A.$ Это свойство становится очевидным, если воспользоваться представлением матричной экспоненты в виде бесконечного ряда:

$$e^{tA} \; = E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \; .... + \frac{t^k}{k!}A^k \; +.... \tag{7}$$

При этом имеем:

$$A\, e^{tA} = A + \frac{t}{1!}A^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \ ......+.\frac{t^k}{k!}A^{k+1} + ... \ = e^{tA} A .$$

2. Точно также показывается, что, если A и B – перестановочные матрицы, то перестановочными будут матрицы A и матричная экспонента матрицы B, или матрица B и матричная экспонента матрицы A:

$$A e^{tB} = e^{tB} A\ , \quad B e^{tA} = e^{tA} B, \text{ если } AB = BA.$$

3. Пусть AB = BA. Составим матричную функцию V(t) = $e^{tA}\ \ e^{tA}$. Имеем:

$$\frac{dV}{dt}(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} .$$

Поскольку матрицы B и e^{tA} перестановочны, то

$$\frac{dV}{dt}(t) = \quad Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)V(t) \ .$$

Кроме того, V(0) = E. Следовательно, по определению (6) V(t) = $e^{t(A+B)}$. Таким образом,

$$e^{tA}\ e^{tB} = e^{t(A+B)}, \text{ если } AB = BA.$$

Важно обратить внимание на то, что

$$e^{tA}\ e^{tB} \neq e^{t(A+B)}, \quad \text{если} \quad AB \neq BA.$$

4. Очевидно, матрицы A и (-A) перестановочны. Поэтому $e^{tA}\ e^{-tA} = e^{t(A-A)} = E$. В результате мы приходим к выводу, что матрица e^{-tA} является обратной матрицей матричной экспоненты матрицы A:

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

(Заметим, что в данном случае для вычисления обратной матрицы достаточно в показателе экспоненты заменить t на (-t)).

5. По этой причине $e^{tA}\ e^{tA} = (e^{tA})^2 = e^{2tA}$, и т. д.

$$(e^{tA})^m = e^{mtA} .$$

6. Из представления матричной экспоненты в виде (7) следует, что матричная экспонента сопряженной матрицы A* равна сопряженной матричной экспоненте матрицы A:

$$e^{tA^*} = (e^{tA})^* .$$

7. Пусть A и B – подобные матрицы: A = TBT^{-1}, где T – произвольная невырожденная матрица, det(T) $\neq 0$. Так как $A^k = TB^kT^{-1}$, то

$$e^{tA} = E + \frac{t}{1!}TBT^{-1} + \frac{t^2}{2!}TB^2T^{-1} + \ldots\ldots + \frac{t^k}{k!}TB^kT^{-1} + \ldots = $$
$$= T\left(E + \frac{t}{1!}B + \frac{t^2}{2!}B^2 + \ldots\ldots + \frac{t^k}{k!}B^k + \ldots\right)T^{-1} = T\,e^{tB}\,T^{-1}.$$

Таким образом, матричные экспоненты подобных матриц подобны.

8. Приведем оценки для нормы матричной экспоненты. В силу (7)

$$\|e^{tA}\| = \|E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^k}{k!}A^k + \ldots\| \leq$$
$$\leq 1 + \|\frac{t}{1!}A\| + \|\frac{t^2}{2!}A^2\| + \ldots + \|\frac{t^k}{k!}A^k\| + \ldots \leq e^{|t|\|A\|}.$$

Получим теперь оценку $\|e^{tA}\|$ снизу. Имеем:

$$1 = \|e^{tA}e^{-tA}\| \leq \|e^{tA}\|\,\|e^{-tA}\| \leq \|e^{tA}\|\,e^{|t|\|A\|}, \quad \text{т.е.} \quad e^{-|t|\|A\|} \leq \|e^{tA}\|.$$

Итак, двухсторонние оценки нормы матричной экспоненты имеют вид:

$$e^{-|t|\|A\|} \leq \|e^{tA}\| \leq e^{|t|\|A\|}.$$

Вычисление матричной экспоненты.

1. Пусть для приближенного вычисления матричной экспоненты использовалась
частичная сумма ряда (7):

$$e^{tA} \approx S_k = E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots\ldots + \frac{t^k}{k!}A^k .$$

Получим оценку нормы остаточного члена ряда (7):

$$\|e^{tA} - S_k\| = \|\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}A^{k+1} + \frac{t^{k+2}}{(k+2)!}A^{k+2} + \frac{t^{k+3}}{(k+3)!}A^{k+3} + \ldots\| \leq$$

$$\leq \frac{(|t|\|A\|)^k}{(k+1)!}\left(\frac{|t|\|A\|}{1} + \frac{(|t|\|A\|)^2}{k+2} + \frac{(|t|\|A\|)^3}{(k+2)(k+3)} + \ldots\right) \leq$$

$$\leq \frac{(|t|\|A\|)^k}{(k+1)!}\left(\frac{|t|\|A\|}{1!} + \frac{(|t|\|A\|)^2}{2!} + \frac{(|t|\|A\|)^3}{3!} + \ldots\right) = \frac{(|t|\|A\|)^k}{(k+1)!}\left(e^{|t|\|A\|} - 1\right).$$

Таким образом, оценка для нормы погрешности приближения матричной экспоненты имеет вид:

$$\| e^{tA} - S_k \| = \frac{(|t|\|A\|)^k}{(k+1)!}\,(e^{|t|\|A\|} - 1).$$

2. Вычисление матричной экспоненты с привлечением жордановой формы. Обозначим через J жорданову форма (n x n)-матрицы A, $A = TJT^{-1}$, состоящую из p стандартных жордановых n_k x n_k-клеток J_k, k = 1, 2, …, p, $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & J_p \end{bmatrix}.$$

Согласно свойству 6

$$e^{tA} = T\,e^{tJ}\,T^{-1}.$$

Найдем матричную экспоненту жордановой формы. По определению (7)

$$e^{tJ} = E + \frac{t}{1!}J + \frac{t^2}{2!}J^2 + \ldots\ldots + \frac{t^k}{k!}J^k + \ldots. \qquad (8)$$

Поскольку

$$J^m = \begin{bmatrix} J_1^m & & & \\ & J_2^m & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & J_p^m \end{bmatrix},$$

то после подстановки в (8) выражений J, J^2, …, J^k, … получаем:

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & e^{tJ_p} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для определения матричной экспоненты жордановой формы нам осталось найти матричную экспоненту стандартной жордановой клетки, имеющей вид:

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & & & \\ & \lambda_k & 1 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \lambda_k & 1 \\ & & & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

С этой целью представим J_k в виде суммы двух матриц:

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & & & & & \\ & \lambda_k & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \lambda_k & \\ & & & & & \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = \lambda_k E + B.$$

Так как матрицы E и B перестановочны, то (свойство 3.)

$$e^{t(\lambda_k E+B)} = e^{t\lambda_k E} e^{tB} = e^{\lambda_k t} e^{tB}.$$

Далее, воспользуемся представлением матричной экспоненты e^{tB} в виде бесконечного ряда. Для этого нам потребуются степени матрицы B. Имеем:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},\ B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \dots, B^{n_k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & 0 \end{bmatrix}.$$

Более высокие степени матрицы B дают нулевую матрицу. В результате матричная экспонента определяется конечной суммой ряда:

$$e^{tB} = E + \frac{t}{1!}B + \frac{t^2}{2!}B^2 + \dots\dots + \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}B^{n_k-1}.$$

После подстановки сюда степеней матрицы B получаем:

$$e^{tB} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \dots\ 1 & \frac{t}{1!} \\ & & & & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Итак, матричная экспонента стандартной жордановой клетки имеет вид:

$$e^{tJ_k} = e^{\lambda_k t}\begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \cdots & 1 & \frac{t}{1!} \\ & & & & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_k t} & \frac{te^{\lambda_k t}}{1!} & \frac{t^2e^{\lambda_k t}}{2!} & \frac{t^3e^{\lambda_i t}}{3!} & \cdots & \frac{t^{n_k-1}e^{\lambda_i t}}{(n_k-1)!} \\ & e^{\lambda_k t} & \frac{te^{\lambda_k t}}{1!} & \frac{t^2e^{\lambda_k t}}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_k-2}e^{\lambda_k t}}{(n_k-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \cdots & e^{\lambda_k t} & \frac{te^{\lambda_k t}}{1!} \\ & & & & \cdots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix}.$$

Напомним, что жорданова форма матрицы определяется ее спектром. Пусть λ_k - собственное число матрицы А кратности m_k ; r_k – ранг матрицы (А – λ_k E); $d_k = n - r_k$ – дефект матрицы А, равный числу собственных векторов, соответствующих λ_k, $d_k \le m_k$. Если $d_k = m_k$, то λ_k соответствуют m_k одномерных жордановых клеток. В противном случае число одномерных клеток равно d_k-1. К ним добавляется стандартная жорданова клетка размера $m_k - d_k + 1$. Одномерной клетке соответствует столбец матрицы Т, являющийся собственным вектором матрицы А. Если клетка неодномерная, то ей соответствуют столбцы матрицы А, представляющие собственный вектор и цепочку присоединенных векторов, число которых равно $m_k - d_k$.

Рассмотрим пример. Определим матричную экспоненту (8 x 8) - матрицы А,
$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$, используя жорданову форму J матрицы А, если спектр матрицы А состоит из следующих собственных чисел: собственное число λ_1 кратности 3, ранг (А - $\lambda_1 E$) равен 7; собственное число λ_2 кратности 1, ранг (А - $\lambda_2 E$) равен 7; собственное число λ_3 кратности 4, ранг (А - $\lambda_3 E$) равен 5. В этом случае жорданова форма матрицы А состоит из трех одномерных клеток, одной клетки размера 3 и одной клетки размера 2. Жорданова форма и матричная экспонента жордановой формы имеют вид:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & & \\ . & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \lambda_3 & & & \\ & & & & & \lambda_3 & & \\ & & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & & & & & \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ . & & & e^{\lambda_2 t} & & & & \\ & & & & e^{\lambda_3 t} & & & \\ & & & & & e^{\lambda_3 t} & & \\ & & & & & & e^{\lambda_3 t} & te^{\lambda_3 t} \\ & & & & & & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$$

Столбцы матрицы перехода $T = [\,T_1\ T_2\ T_3\ T_4\ T_5\ T_6\ T_7\ T_8]$ удовлетворяют условиям, которые следуют из определения подобия матриц А и J : $A = TJT^{-1}$ или, что то же самое, AT = TJ. Приравнивая соответствующие столбцы матриц AT и TJ получаем:

$AT_1 = \lambda_1 T_1$, $AT_2 = \lambda_1 T_2 + T_1$, $AT_3 = \lambda_1 T_3 + T_2$ -

цепочка из собственного вектора T_1 и присоединенных векторов T_2, T_3, соответствующая собственному числу λ_1;

$$AT_4 = \lambda_2 T_4, \quad AT_5 = \lambda_3 T_5\ , \ AT_6 = \lambda_3 T_6 \ -$$

собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным числам λ_2 и λ_3;

$$AT_7 = \lambda_3 T_7\ , \ AT_8 = \lambda_3 T_8 + T_7 \ –$$

цепочка из собственного вектора T_7 и присоединенного вектора T_8, соответствующая собственному числу λ_3.

Заметим, что вектор – функцию y(t), являющуюся решением задачи Коши (1), можно представить в виде:

$$y(t) = e^{tA}y^0 = Te^{tJ}\,T^{-1}y^0 = Te^{tJ}C, \ C = T^{-1}y^0.$$

Пусть, далее, $y^{[1]}(t)$, $y^{[2]}](t)$, …,$y^{[n]}](t)$ – столбцы матричной функции $V(t) = Te^{tJ}$. Тогда решение задачи Коши (1) имеет вид линейной комбинации столбцов матричной функции V(t):

$$y(t) = C_1y^{[1]}(t) + C_2y^{[2]}(t) + \ldots.+C_ny^{[n]}(t), \qquad (9)$$

где C_1, C_2, …, C_n – компоненты вектора C, определяемые из системы линейных алгебраических уравнений с матрицей T:

$$TC = y^0. \qquad (10)$$

Так как T – невырожденная матрица, то формула (9) описывает любые решения однородной системы дифференциальных уравнений (1), поскольку коэффициенты линейной комбинации однозначно определяются из (10) условием прохождения решения через произвольно задаваемую точку y^0 в n – мерном евклидовом пространстве. Очевидно, каждая из вектор-функций $y^{[j]}(t)$, j = 1,2,…, n, является решением однородной системы.

3. Представление матричной экспоненты в виде матричного полинома. Пусть λ_1, λ_2,…,λ_n – собственные числа (n x n) – матрицы A. Введем в рассмотрение матричные полиномы :

$$\begin{aligned}
&P_1(A) = A - \lambda_1E \\
&P_2(A) = P_1(A)(A - \lambda_2E) \\
&P_3(A) = P_2(A)(A - \lambda_3E) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_{n-1}(A) = P_{n-2}(A)(A-\lambda_{n-1}E) \\
&P_n(A) = P_{n-1}(A)(A - \lambda_nE).
\end{aligned} \qquad (11)$$

Как известно из курса линейной алгебры, матрица всегда удовлетворяет своему характеристическому уравнению (теорема Гамильтона-Кэли). Поэтому $P_n(A) = 0$. Из определения матричных полиномов следуют равенства:

$$
\begin{aligned}
&P_1(A) + \lambda_1 E = A \\
&P_2(A) + \lambda_2 P_1(A) = AP_1(A) \\
&P_3(A) + \lambda_3 P_2(A) = AP_2(A) \qquad\qquad (12)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_{n-1}(A) + \lambda_{n-1} P_{n-2}(A) = AP_{n-2}(A) \\
&\quad 0 \;\; + \lambda_n P_{n-1}(A) = AP_{n-1}(A).
\end{aligned}
$$

Здесь учтено, что матрица A перестановочна с матричными полиномами.

Далее нам потребуются выражения компонент $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$,....,$\psi_n(t)$ вектор-функции $\psi(t)$, которая является решением задачи Коши :

$$
\frac{d\psi}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ 1 & \lambda_2 & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & 1 & \lambda_{n-1} & \\ & & & & 1 & \lambda_n \end{bmatrix} \psi , \quad \psi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

с покомпонентной записью:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\psi_1}{dt} = \lambda_1 \psi_1 , && \psi_1(0) = 1 \\
&\frac{d\psi_2}{dt} = \lambda_2 \psi_2 + \psi_1, && \psi_2(0) = 0 \qquad\qquad (13)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{d\psi_n}{dt} = \lambda_n \psi_n + \psi_{n-1}, && \psi_n(0) = 0 .
\end{aligned}
$$

Очевидно, первая строка (13) представляет задачу Коши, определяющую $\psi_1(t)$, решение которой имеет вид:

$$
\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t} .
$$

Остальные компоненты $\psi(t)$ находятся из рекуррентных соотношений:

$$
\psi_k(t) = e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} \psi_{k-1}(s) ds \;, \; k = 2, 3....,n. \qquad (14)
$$

Действительно, предположим , что компонента $\psi_{k-1}(t)$ уже известна. Если $\psi_k(t)$ – k-я компонента решения задачи Коши (13), то k-е уравнение системы (13) можно представить в виде тождества:

$$e^{-\lambda_k t}(\frac{d\psi_n}{dt}(t) - \lambda_k \psi(t)) \equiv e^{-\lambda_k t}\psi_{n-1}(t),$$

или

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda_k t}\psi_k(t)) \equiv e^{-\lambda_k t}\psi_{n-1}(t).$$

После интегрирования левой и правой части тождества от 0 до t получаем:

$$e^{-\lambda_k t}\psi_k(t)) \equiv \int_0^t e^{-\lambda_k s}\psi_{k-1}(s)ds,$$

откуда и следует формула (13).

Например, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$\psi_2(t) = e^{\lambda_2 t}\int_0^t e^{-\lambda_2 s}e^{\lambda_1 s}ds = e^{\lambda_2 t}\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}-1}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{e^{\lambda_2 t}-e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2-\lambda_1}. \tag{15}$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то

$$\psi_2(t) = e^{\lambda_1 t}\int_0^t e^{-\lambda_1 s}e^{\lambda_1 s}ds = te^{\lambda_1 t}.$$

При равенстве собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ функции $\psi_1(t), \psi_2(t),\ldots,\psi_k(t)$ имеют, согласно рекуррентной формуле, следующие выражения:

$$\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \psi_2(t) = \frac{t}{1}e^{\lambda_1 t}, \quad \ldots, \quad \psi_k(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_1 t}. \tag{16}$$

Покажем теперь, что матричная функция

$$Y(t) = \psi_1(t)E + \psi_2(t)P_1(A) + \psi_3(t)P_2(A) \ldots + \psi_n(t)P_{n-1}(A),$$

где матричные полиномы $P_1(A)$, $P_2(A),\ldots$, $P_{n-1}(A)$ и функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t),\ldots,\psi_n(t)$, определены в (11) и (13) соответственно, является решением задачи Коши (6). Действительно, $Y(0) = E$ в силу задания начальных условий задачи Коши (13). Составим, далее, выражение производной матричной функции $Y(t)$, учитывая при этом, что компоненты вектор-функции $\psi(t)$ удовлетворяют уравнениям (13) . Имеем:

$$\frac{dY}{dt}(t) = \frac{d\psi_1}{dt}(t)E + \frac{d\psi_2}{dt}(t)P_1(A) + \frac{d\psi_3}{dt}(t)P_3(A) + \ldots + \frac{d\psi_n}{dt}(t)P_{n-1}(A) =$$

$$= \lambda_1\psi_1(t)E + (\lambda_2\psi_2(t)+\psi_1(t))P_1(A) + (\lambda_3\psi_3(t)+\psi_2(t))P_3(A) + \ldots + (\lambda_n\psi_n(t)+\psi_{n-1}(t))P_{n-1}(A) =$$

$$= \psi_1(t)(\lambda_1 E + P_1(A)) + \psi_2(t)(\lambda_2 P_1(A) + P_2(A)) + (\lambda_3\psi_3(t)+\psi_2(t))P_3(A) + \ldots + \lambda_n\psi_n(t)P_{n-1}(A).$$

После замены коэффициентов при $\psi_k(t)$ на их выражения из (13) получаем:

$$\frac{dY}{dt}(t) = \psi_1(t)A + \psi_2(t)AP_1(A) + \psi_3(t)AP_2(A) \ldots + \psi_n(t)AP_{n-1}(A) =$$

$$= A(\psi_1(t)E + \psi_2(t)P_1(A) + \psi_3(t)P_2(A) \ldots + \psi_n(t)P_{n-1}(A)) = AY(t).$$

В результате мы доказали, что Y(t) является матричной экспонентой матрицы A:

$$e^{tA} = \psi_1(t)E + \psi_2(t)P_1(A) + \psi_3(t)P_2(A) \ldots + \psi_n(t)P_{n-1}(A). \qquad (17)$$

Рассмотрим пример. Найдем матричную экспоненту матрицы A и решение задачи Коши (1), если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Отсюда находим, что $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 5$ - собственные числа матрицы A. Им соответствуют матричный полином

$$P_1(A) = A - \lambda_1 E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

и функции

$$\psi_1(t) = e^t, \quad \psi_2(t) = \frac{e^{5t} - e^t}{5-1} = \frac{e^{5t} - e^t}{4}.$$

Таким образом, согласно (17),

$$e^{tA} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{5t} - e^t}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{5t} + 3et}{4} & \frac{e^{5t} - e^t}{4} \\ 3\frac{e^{5t} - e^t}{4} & 3\frac{e^{5t} + e^t}{4} \end{bmatrix}.$$

Запишем решение задачи Коши (1):

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} \frac{e^{5t} + 3et}{4} y_1^0 + \frac{e^{5t} - e^t}{4} y_2^0 \\ 3\frac{e^{5t} - e^t}{4} y_1^0 + 3\frac{e^{5t} + e^t}{4} y_2^0 \end{bmatrix},$$

т.е.

$$y_1(t) = \frac{e^{5t} + e^t}{4} y_1^0 + \frac{e^{5t} - e^t}{4} y_2^0, \quad y_2(t) = 3\frac{e^{5t} - e^t}{4} y_1^0 + 3\frac{e^{5t} + e^t}{4} y_2^0.$$