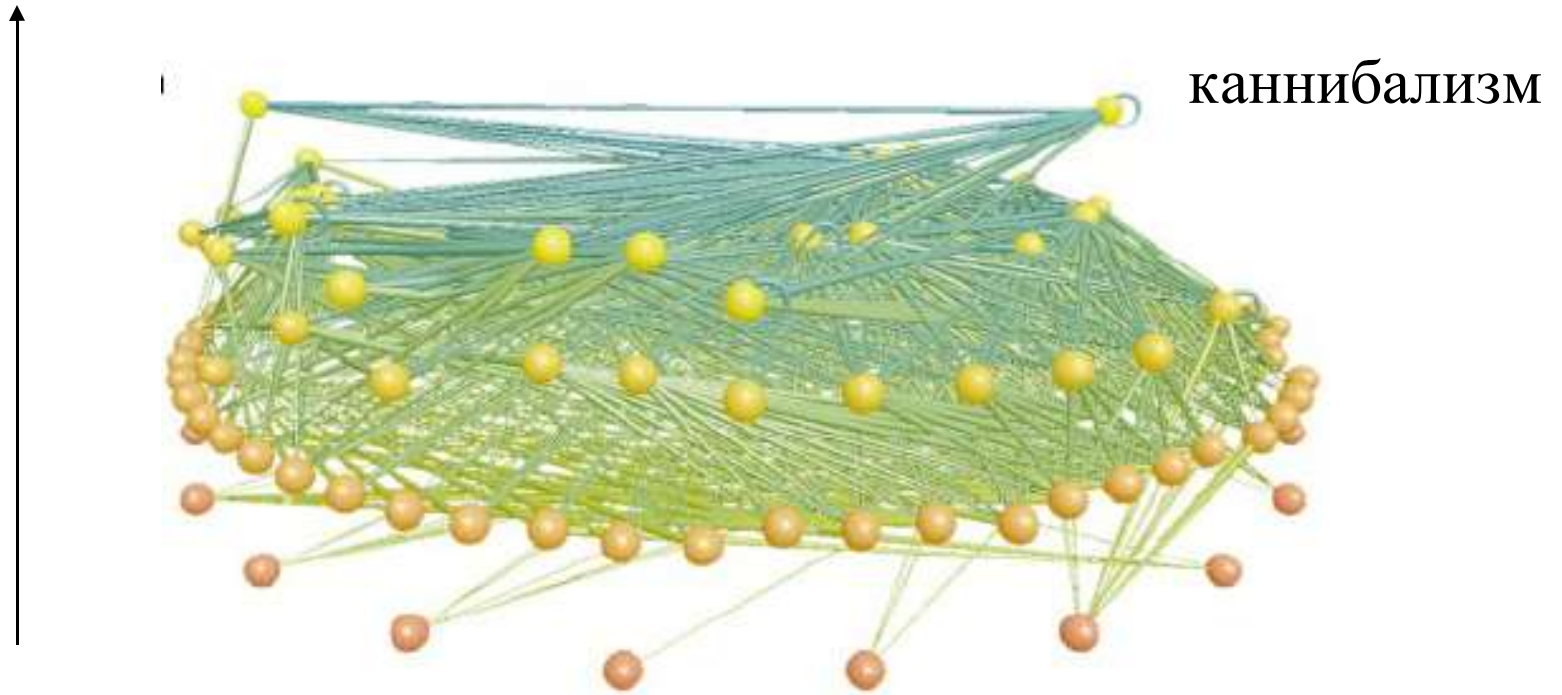
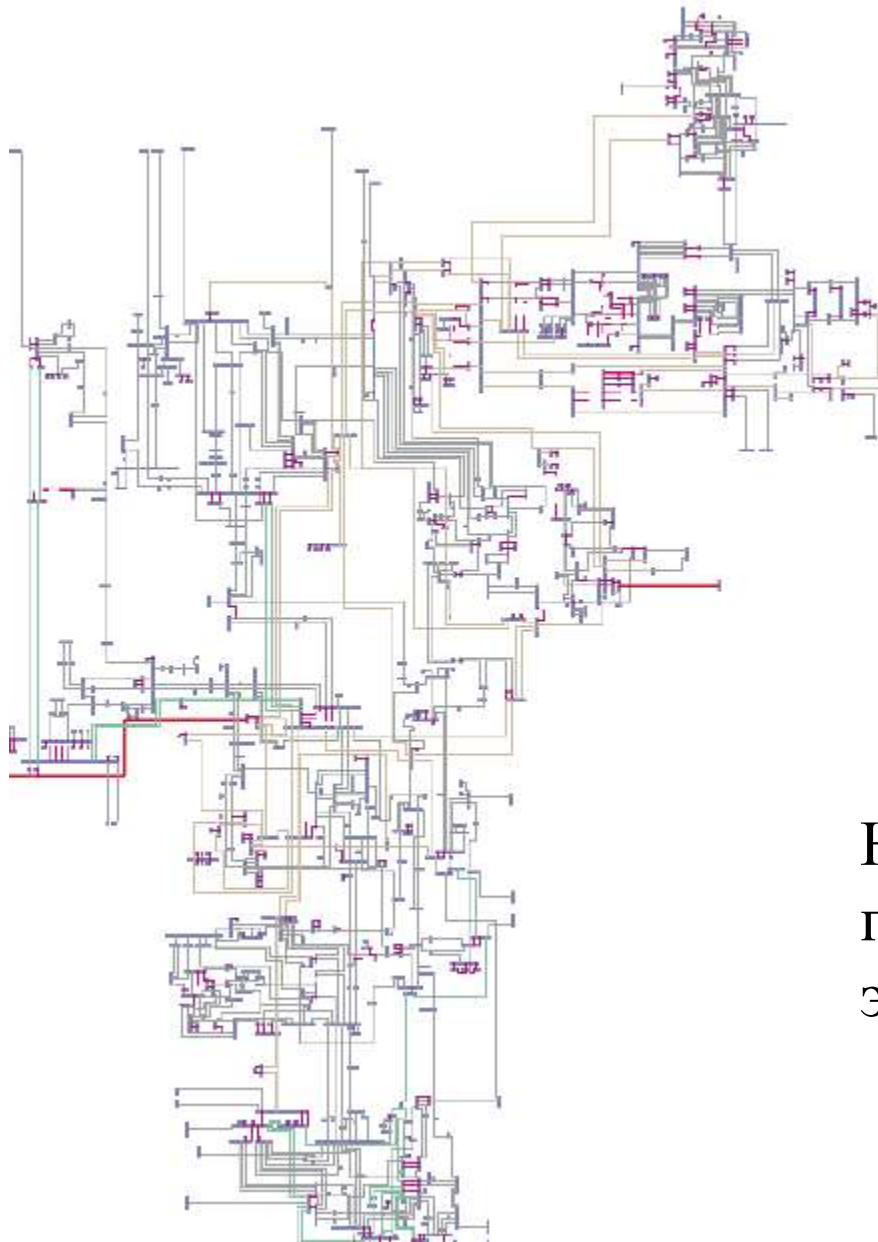


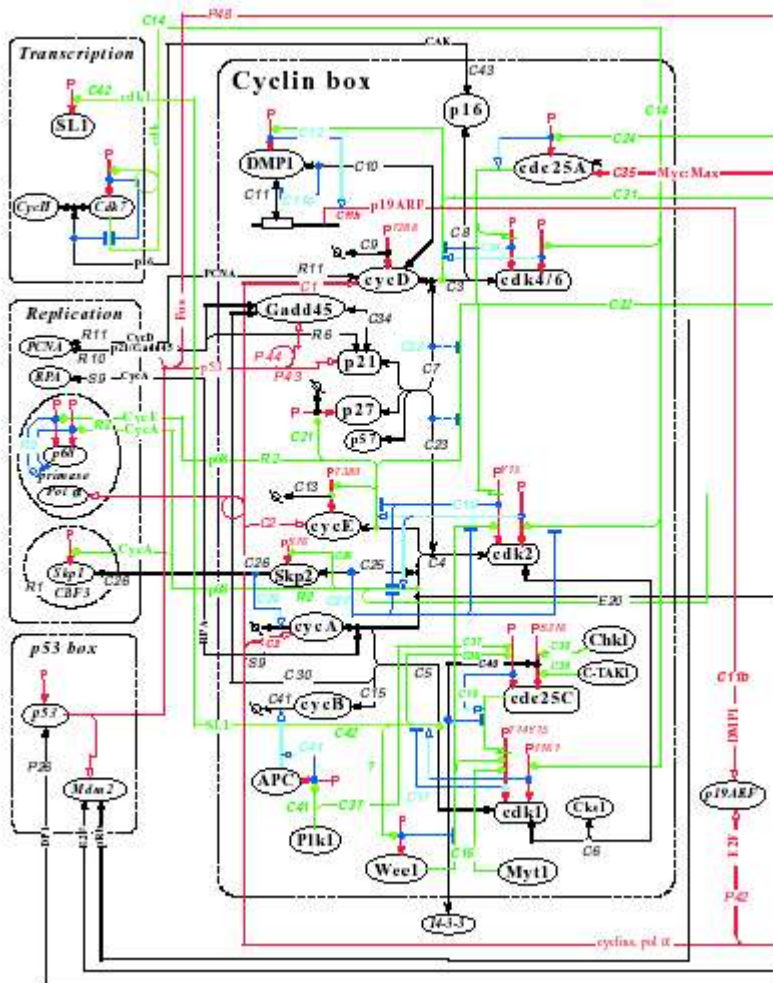
Стохастические сети: структура, динамика, ЭВОЛЮЦИЯ



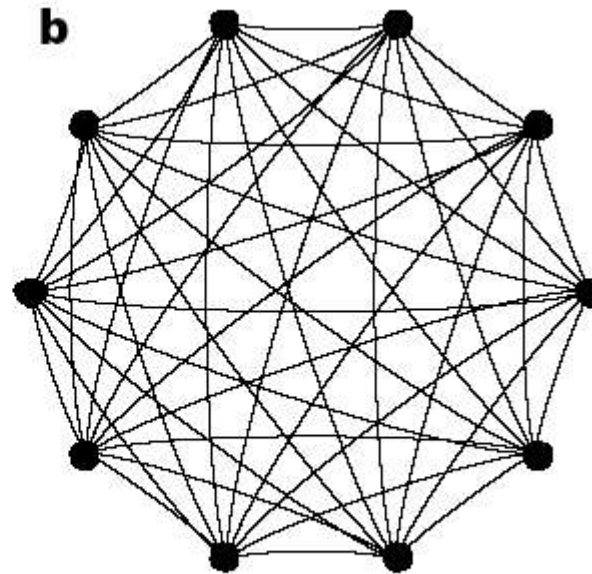
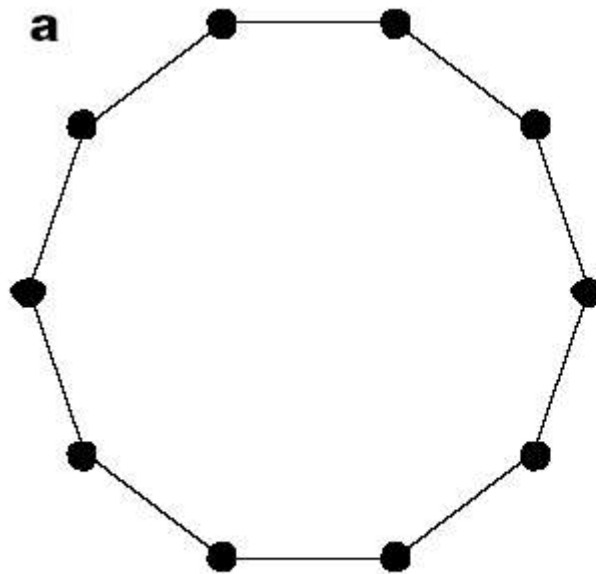
Пищевая сеть озера Литтл-Рок



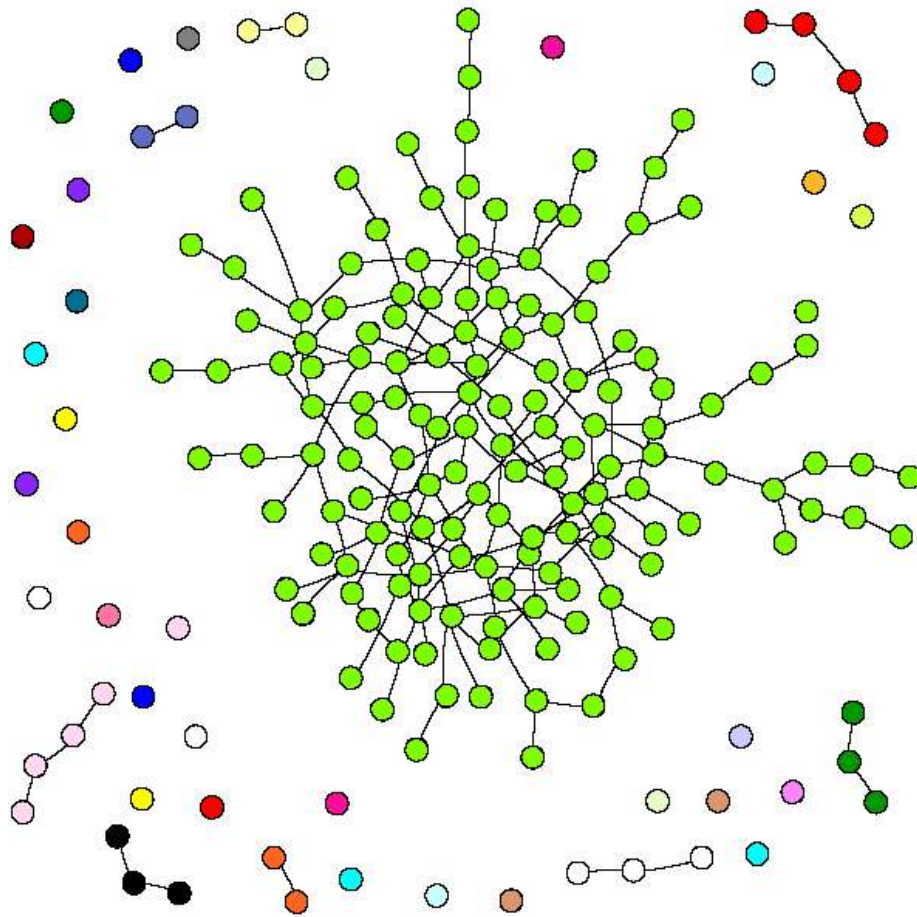
Нью-йоркская сеть
передачи
электричества



Часть карты
молекулярных
взаимодействий
регуляторной сети
контролирующей
клеточный цикл
млекопитающих



Сети регулярной архитектуры

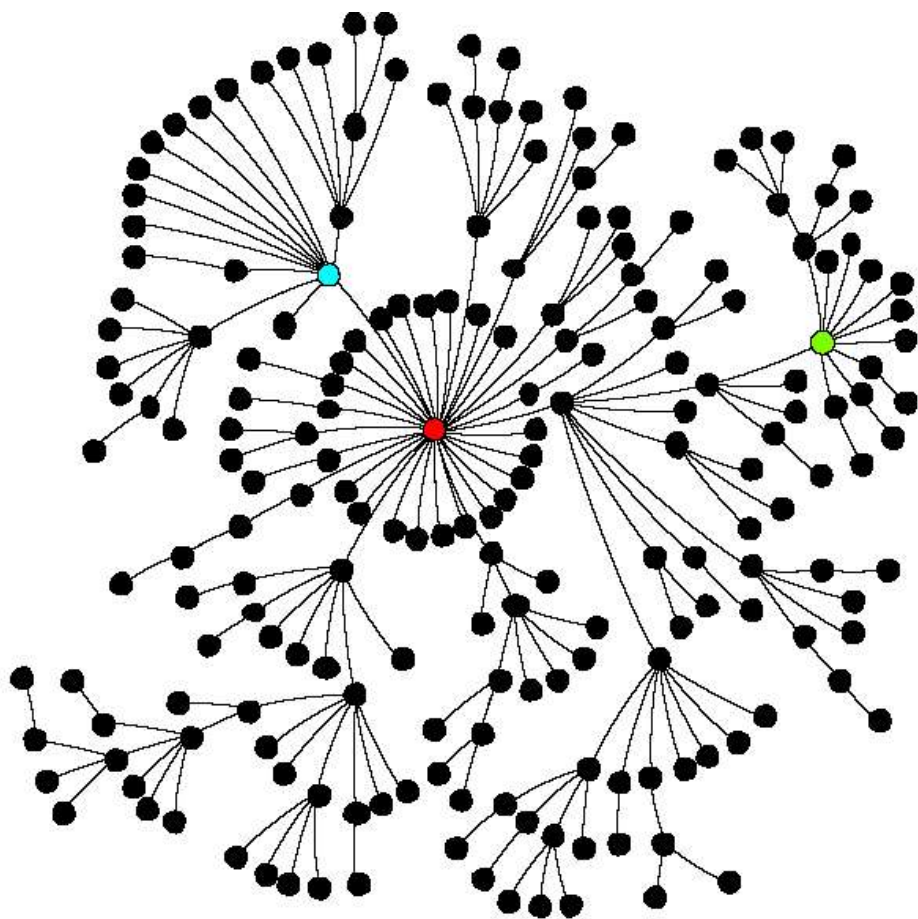


Случайный граф

Число вершин
 $N=200$

Макс связность
одной вершины
 $z=193$

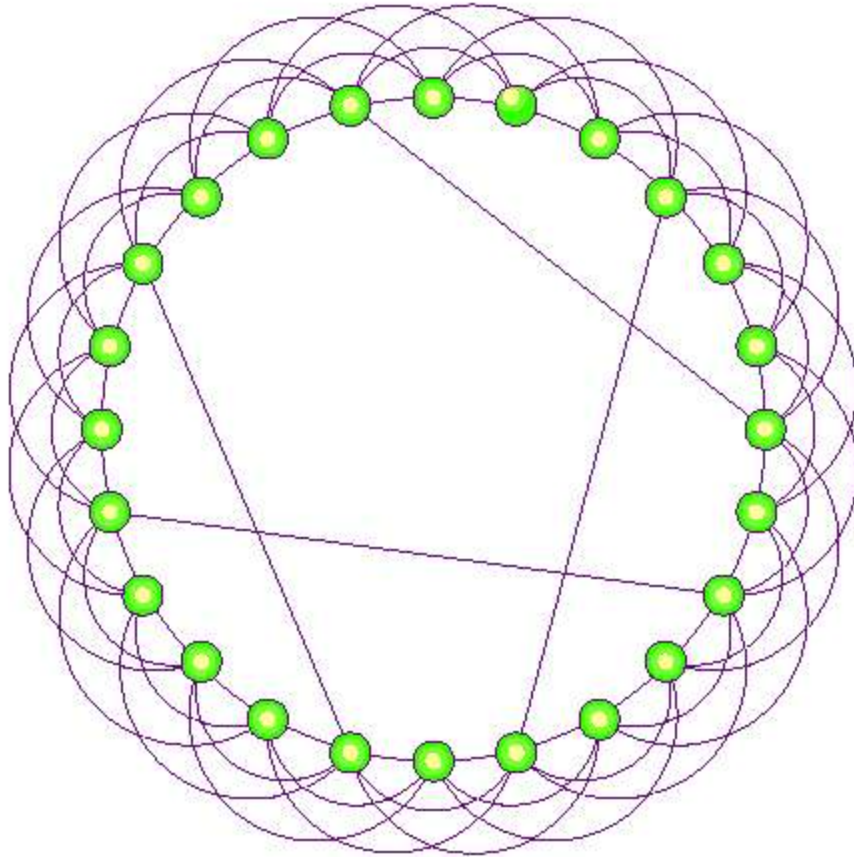
Гигантская
компонента при
 $z > N/2$



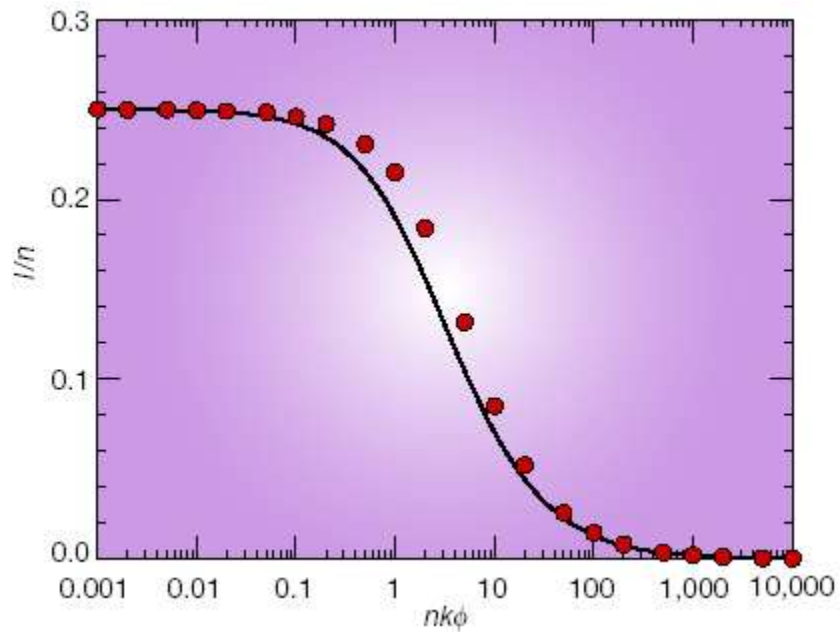
Безмасштабный граф,
полученный
присоединением с
вероятностью,
пропорциональной
текущему числу
связей

Цвет – самые
популярные

200, 100



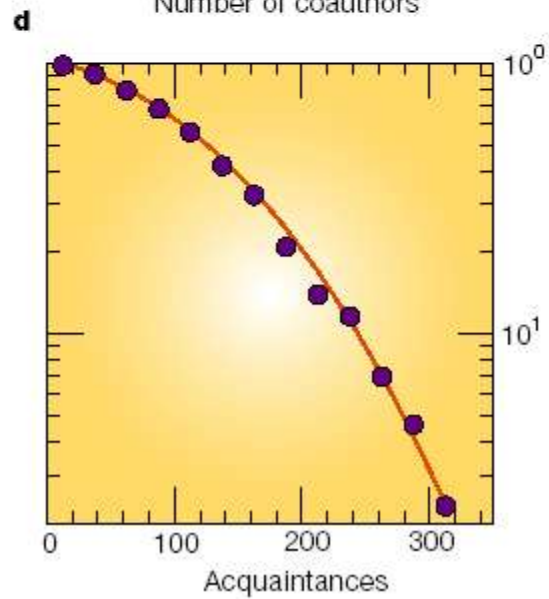
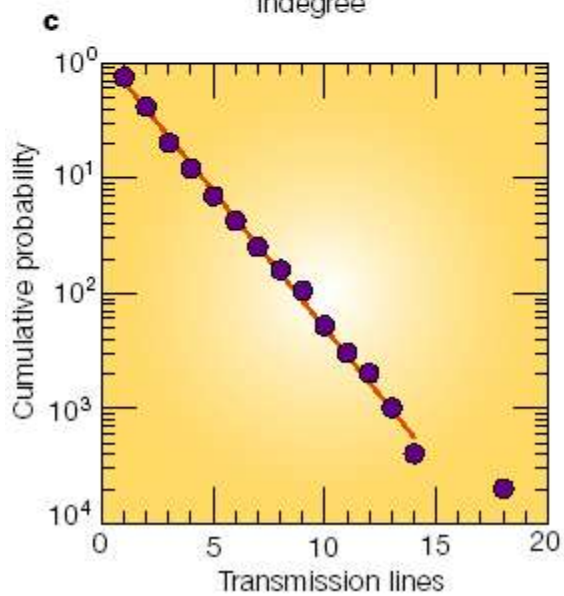
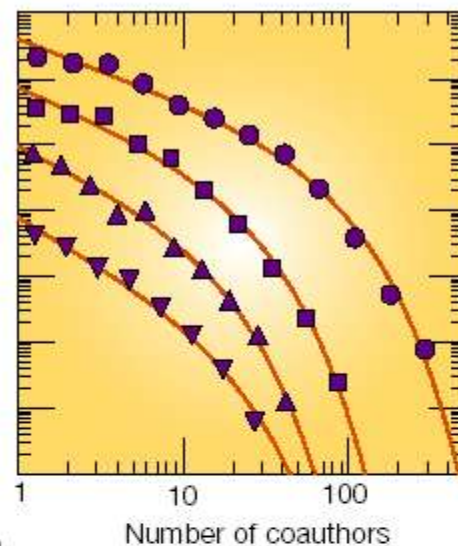
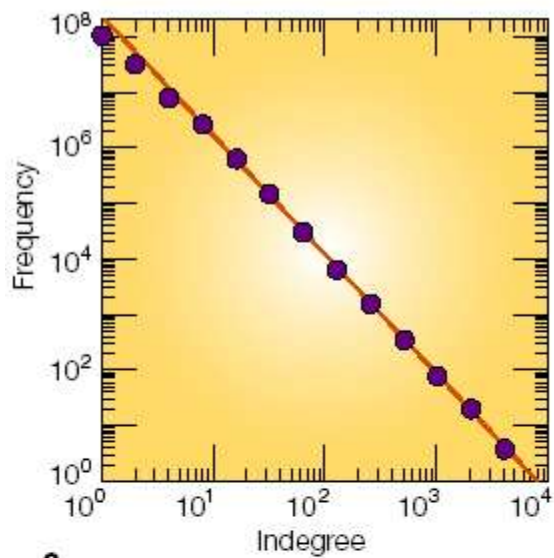
Модель
«малого
мира»

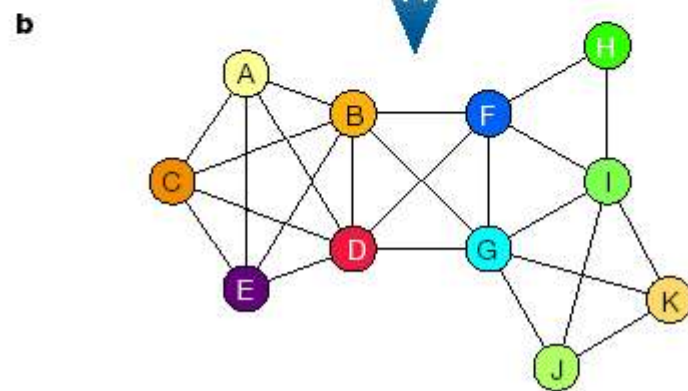
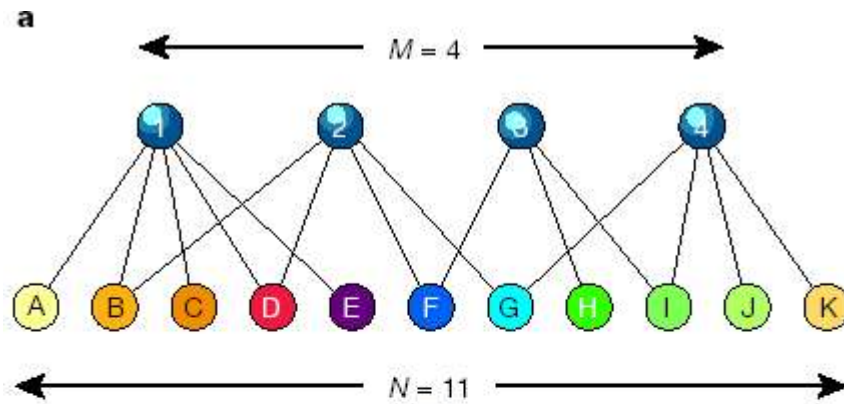


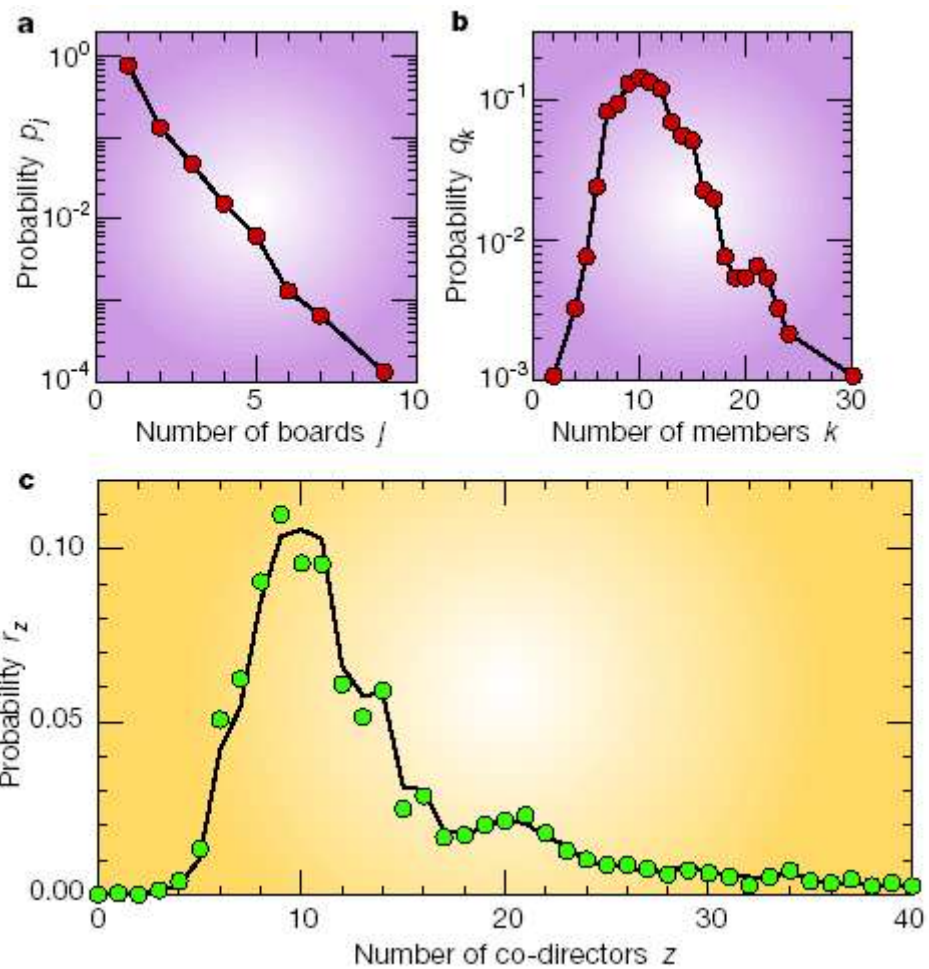
Нормированная средняя длина пути в малом мире в зависимости от числа переключек

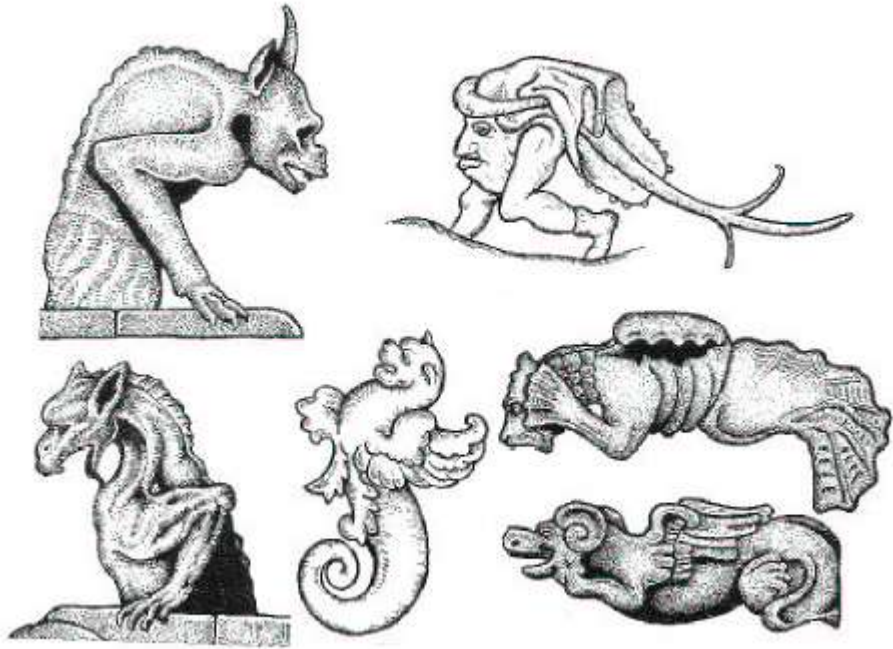
$$C = \frac{3 \times (\text{number of triangles on the graph})}{(\text{number of connected triples of vertices})}$$

Network	Clustering C	
	Theory	Actual
Company directors	0.590	0.588
Movie actors	0.084	0.199
Biomedical authors	0.042	0.088









**Twelve key metabolites in *E. coli*
ranked by degree (“connectivity”)**

glutamate (51)

pyruvate (29)

coenzyme A (29)

α -ketoglutarate (27)

glutamine (22)

aspartate (20)

acetyl-CoA (17)

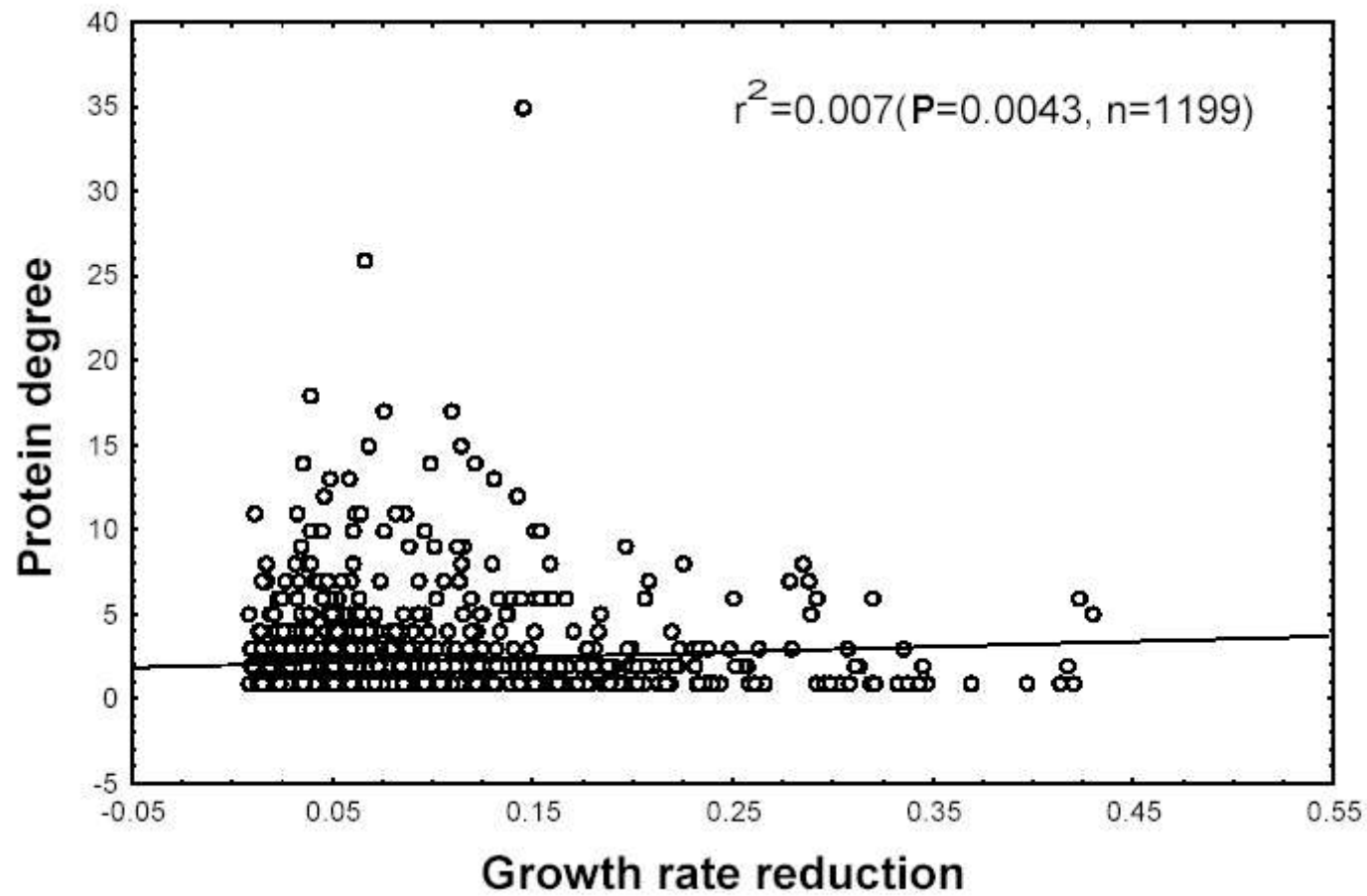
phosphoribosyl pyrophosphate (16)

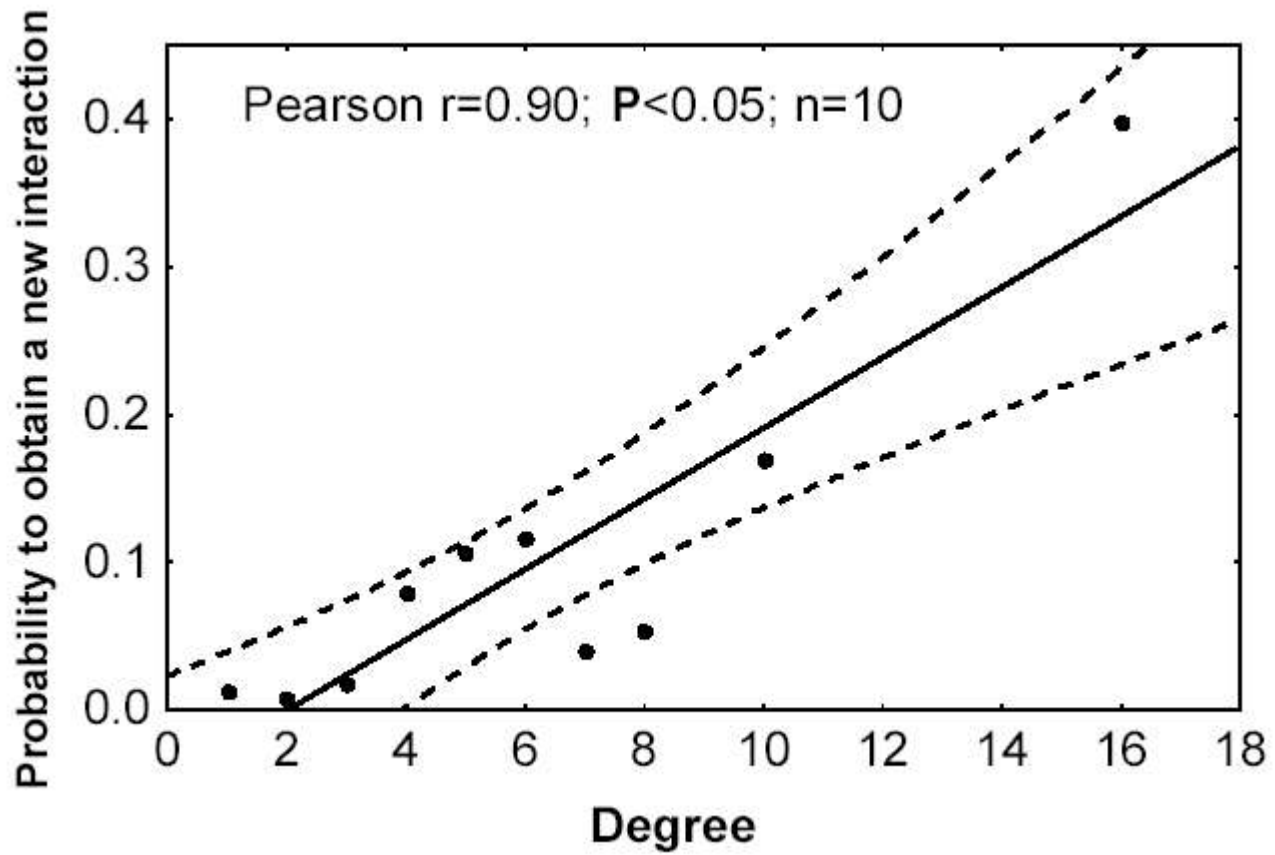
tetrahydrofolate (15)

succinate (14)

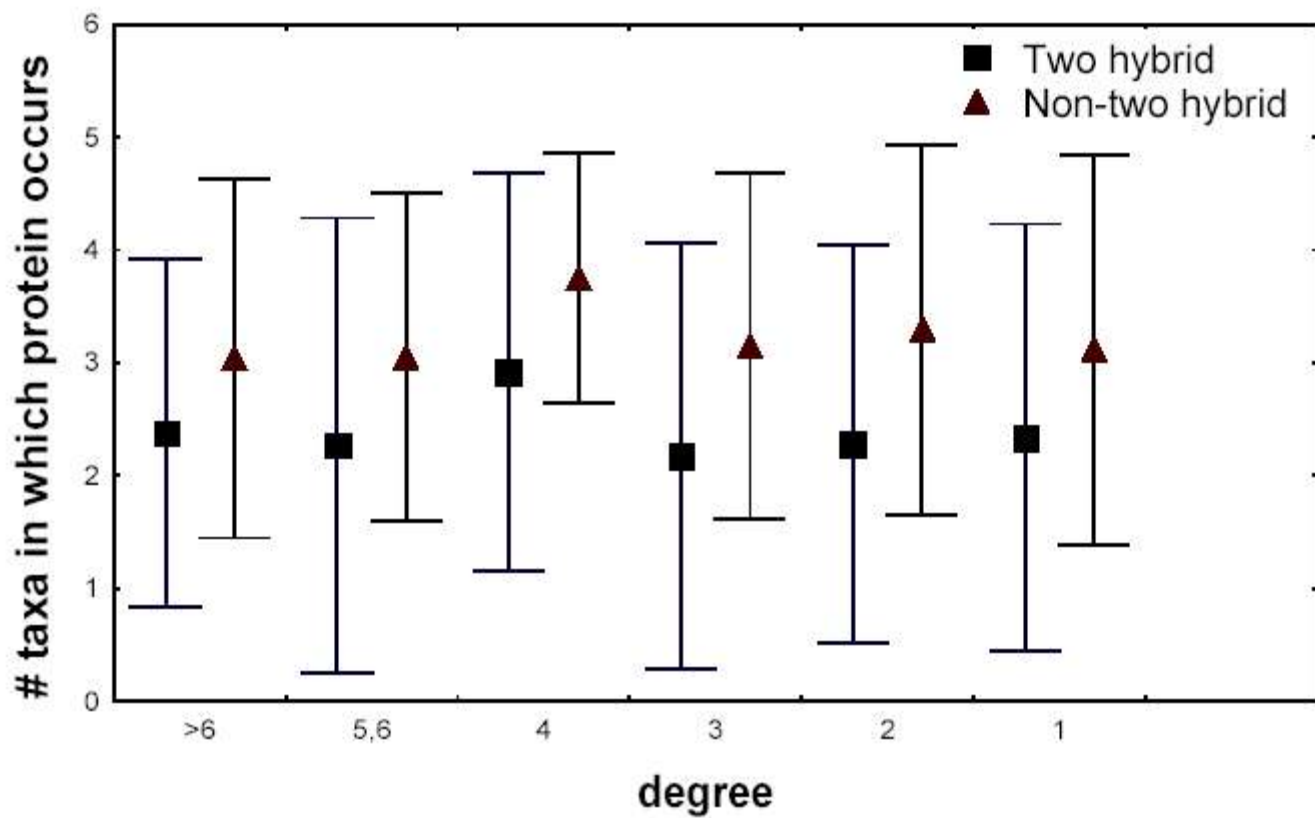
3-phosphoglycerate (13)

serine (13)

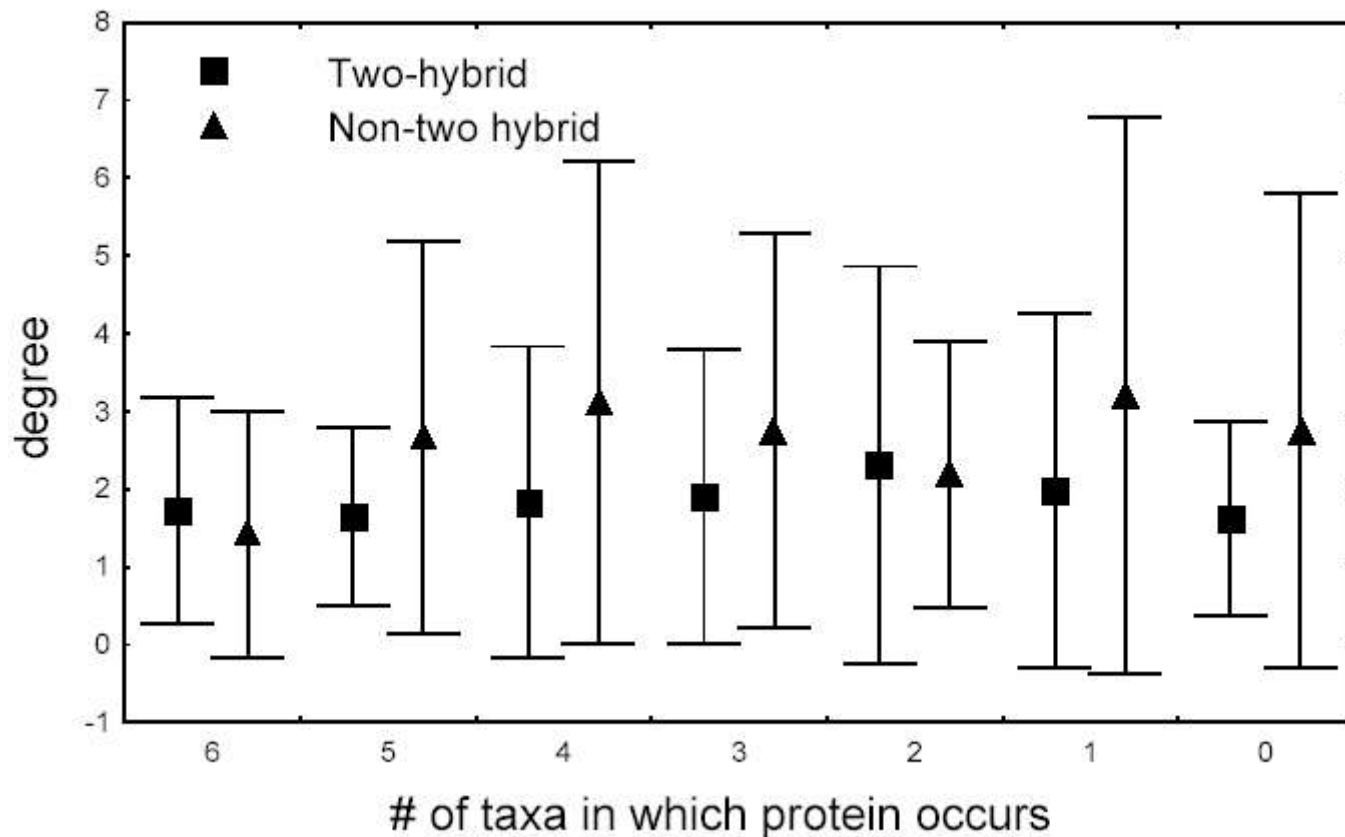


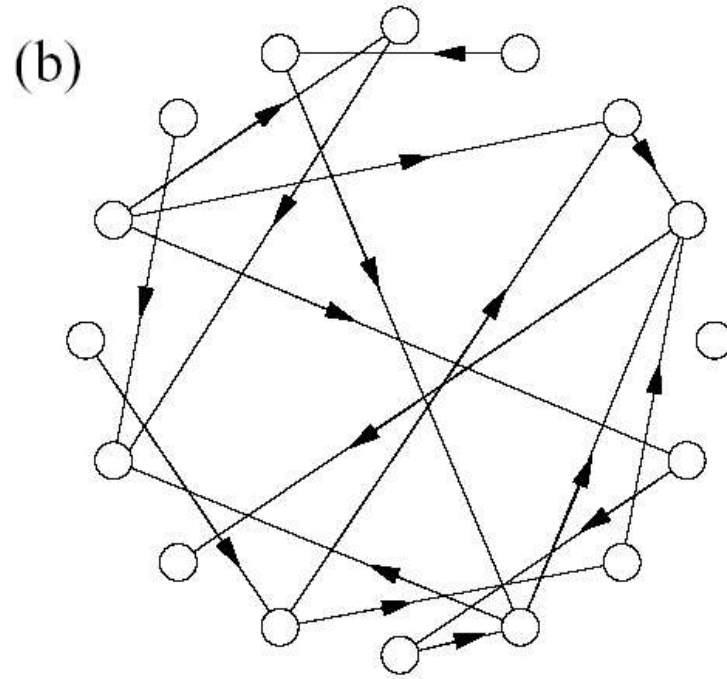
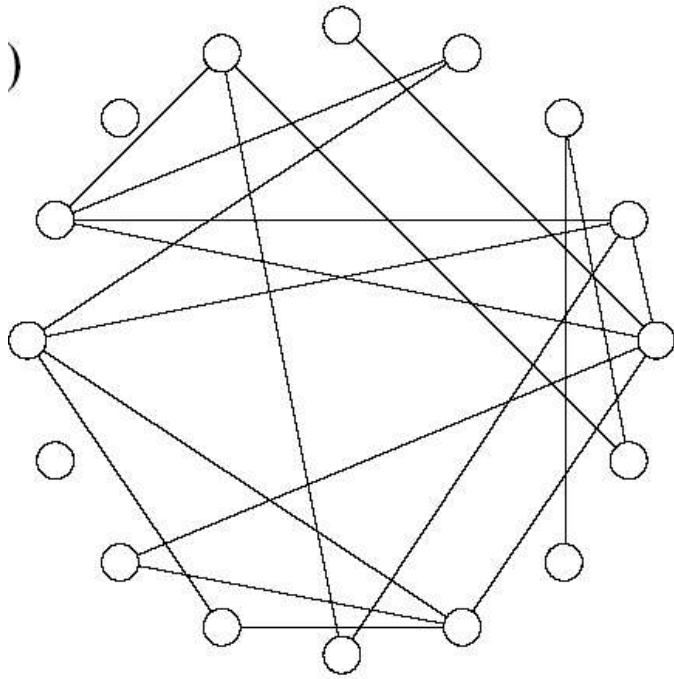


Highly connected proteins do not occur in more taxa



Widely distributed proteins are not more highly connected





$$p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \simeq \frac{z^k e^{-z}}{k!}$$

N k p z

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$$

$$G_0(1) = 1.$$

$$p_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G_0}{dx^k} \right|_{x=0}.$$

$$z = \langle k \rangle = \sum_k k p_k = G'_0(1)$$

$$\langle k^n \rangle = \sum_k k^n p_k = \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^n G_0(x) \right]_{x=1}$$

$$\begin{aligned} [G_0(x)]^2 &= \left[\sum_k p_k x^k \right]^2 = \sum_{jk} p_j p_k x^{j+k} \\ &= p_0 p_0 x^0 + (p_0 p_1 + p_1 p_0) x^1 \\ &\quad + (p_0 p_2 + p_1 p_1 + p_2 p_0) x^2 \\ &\quad + (p_0 p_3 + p_1 p_2 + p_2 p_1 + p_3 p_0) x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{\sum_k k p_k x^k}{\sum_k k p_k} = x \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)}$$

$$G_1(x) = \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)} = \frac{1}{z} G'_0(x)$$

$$\sum_k p_k [G_1(x)]^k = G_0(G_1(x))$$

$$p = z/N$$

$$\begin{aligned} G_0(x) &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} x^k \\ &= (1-p+px)^N = e^{z(x-1)}, \end{aligned}$$

$$G'_0(1) = z$$

$$p_k = z^k e^{-z} / k!$$

$$p_k = (1 - e^{-1/\kappa}) e^{-k/\kappa}$$

$$G_0(x) = (1 - e^{-1/\kappa}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k/\kappa} x^k = \frac{1 - e^{-1/\kappa}}{1 - x e^{-1/\kappa}}$$

$$G_1(x) = \left[\frac{1 - e^{-1/\kappa}}{1 - xe^{-1/\kappa}} \right]^2$$

$$p_k = Ck^{-\tau} e^{-k/\kappa} \quad \text{for } k \geq 1$$

$$G_0(x) = \frac{\sum_k n_k x^k}{\sum_k n_k}$$

$\{86, 150, 363, 238, 109, 54\}$

$$G_0(x) = \frac{86 + 150x + 363x^2 + 238x^3 + 109x^4 + 54x^5}{1000}$$

Стохастические сети: структура, динамика, ЭВОЛЮЦИЯ

Ик булевские сети Кауфманна

Число направленных графов без циклов из n вершин

$$C_n = \frac{n! \cdot 2^{\frac{n}{2} \cdot (n-1)}}{r \cdot z^n}; r \sim 0.57436; z \sim 1.4881$$

n	9	15	30
-----	---	----	----

C_n	$1.21 \cdot 10^{15}$	$2.34 \cdot 10^{72}$	$2.71 \cdot 10^{158}$
-------	----------------------	----------------------	-----------------------

Nk булевские сети Кауфманна (1967)

N – число вершин

k – среднее число входов в вершину

N выходных значений булевских функций

Случайная булевская сеть: случайная топология,
случайная булевская функция для вершины

Число сетей = число топологий \times число вариантов
логических таблиц 2^{2^k}

Верхняя оценка

$$N \binom{N}{k} N^{2^{2^k}}$$

Статистика Nk-сетей

Хаос при $k > 2$ (Derrida et al.)

Вычисление показателя Ляпунова:

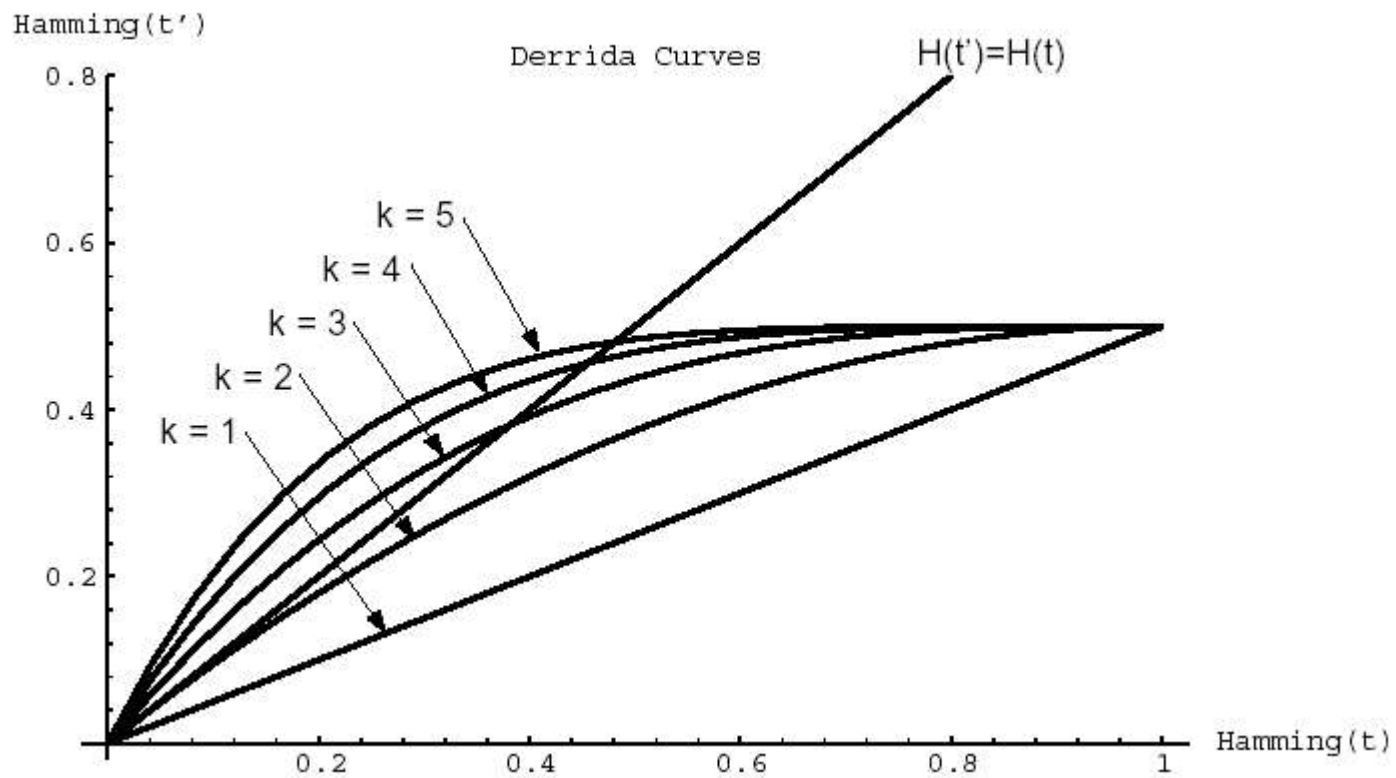
две сети с перекрыванием начальных условий q

$N(1-q)$ – расстояние Хамминга между сетями

Будет ли расстояние расти со временем?

$$q(t+1) = q^K(t) + \frac{1}{2}(1 - q^K(t))$$

В приближении статистической идентичности вершин (обновление логической таблицы)



Неуравновешенные Nk-сети

неравное количество нулей и единиц

P

Граница между порядком и хаосом

$$p_c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{K}}$$

$$x' = -\rho(1-x)^K + \rho$$

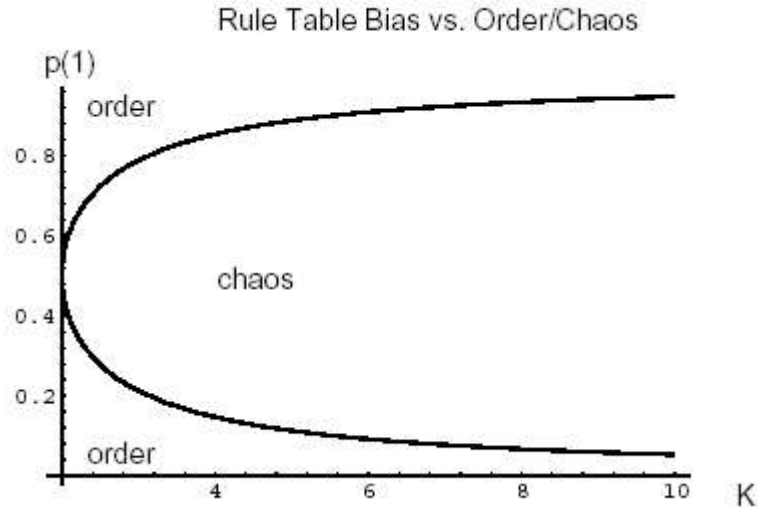
$$\rho = 1 - \left[p^2 + (1-p)^2 \right]$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = K\rho(1-x)^{K-1}$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = -K(K-1)\rho(1-x)^{K-2}$$

$$\rho = \frac{1}{K}$$

$$p_c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{K}}$$



Канализированные сети: подмножество сетей, в которых выходное значение булевской функции вершины определяется только одним из входных значений

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ N_k -СЕТЕЙ

Число аттракторов пропорционально корню из N

$N=80\ 000$

283

Перколяционная замороженная подсеть

Остальное – в изолированных островах
разного размера

Эволюция стохастических сетей

**Коммуникационные
безмасштабные сети: интернет,
www**

**Структурная организация –
следствие характера роста**

Структурные характеристики стохастических сетей

Матрица смежности

Число соседей – локальная характеристика,
определяющая глобальные свойства

«Диаметр» сети - средний (иногда макс) кратчайший
путь

N – число вершин

z_1 среднее число соседей

$z_1^{\bar{\ell}}$ оценка числа вершин на расстоянии 1 или ближе

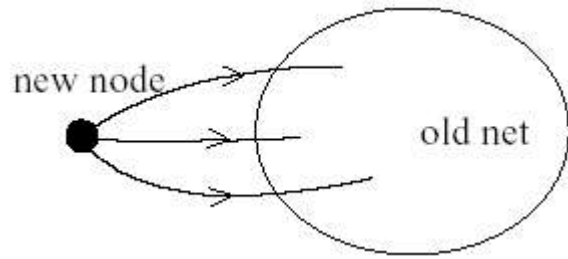
$N \sim z_1^{\bar{\ell}}$ $\bar{\ell} \sim \ln N / \ln z_1$ Малый мир

Коэффициент кластеризации – вероятность, что ближайшие соседи какой-то вершины являются ближайшими соседями друг друга

Размер гигантской компоненты

Бинарные характеристики и проч

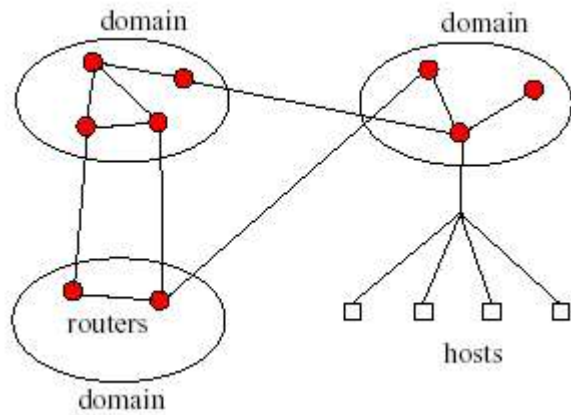
Безмасштабные сети – степенная функция распределения по числу соседей, показатель 2-3



Сеть цитирования – новые вершины уже связаны со старыми

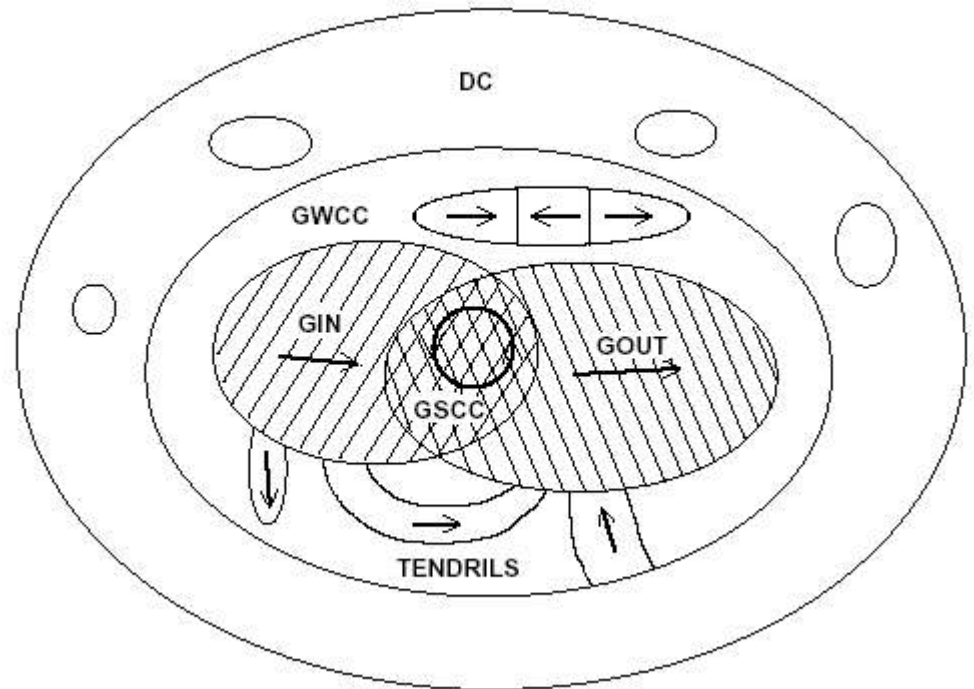
Неравновесные сети – эффекты роста – старые и молодые вершины

Параметры сети сотрудничества актеров	Medline
$N=225\ 226$	1520 тыс
Среднее число соседей 61	18.1
Коэффициент кластеризации 0.79	0.066
Средний кратчайший путь 3.65 (случ графу)	4.6 (близок к



Интернет

WWW



Идолы и фанаты

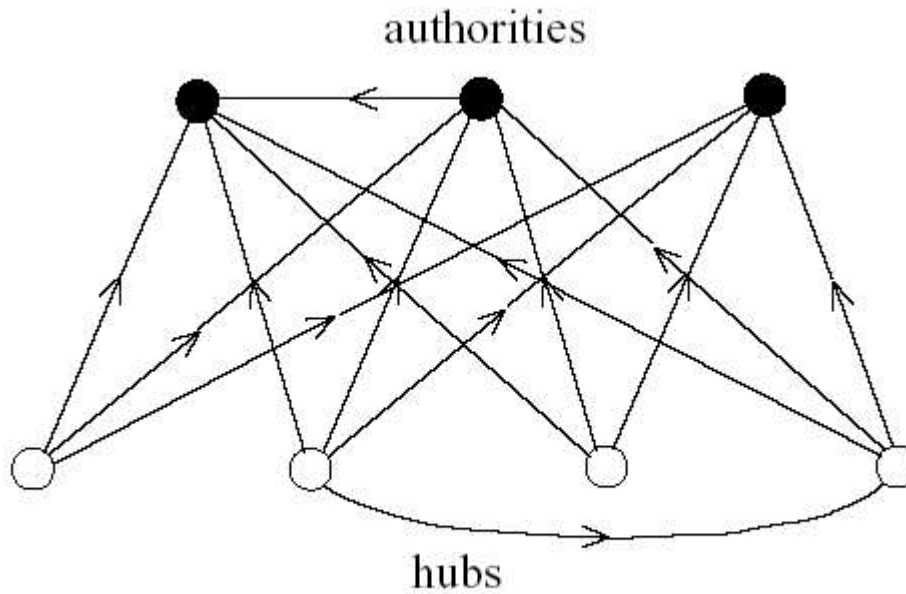


FIG. 7. A bipartite directed sub-graph in the Web being used for indexing cyber-communities [90,91].

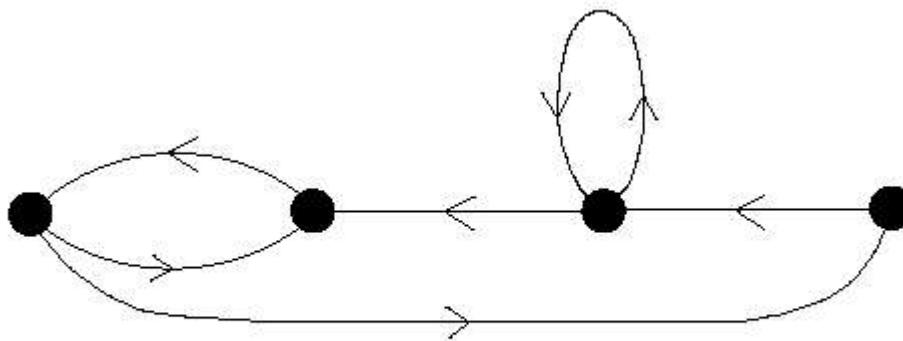


FIG. 8. Typical food web. Cannibalism and mutual eating are widespread.

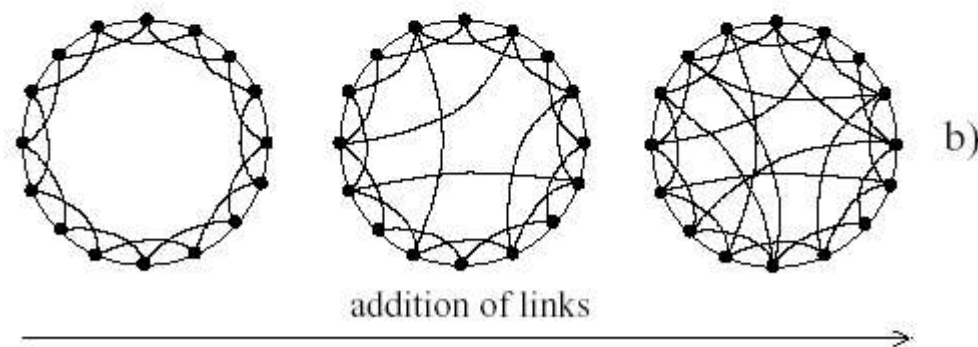
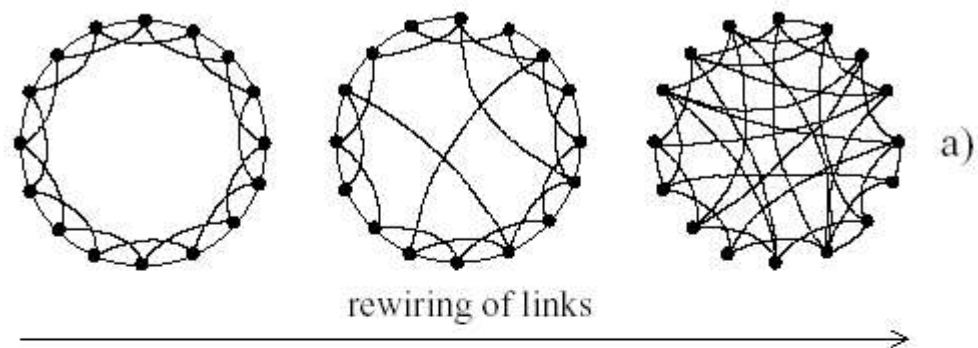


FIG. 10. Small-world networks in which the crossover from a regular lattice to a random network is realized. (a)

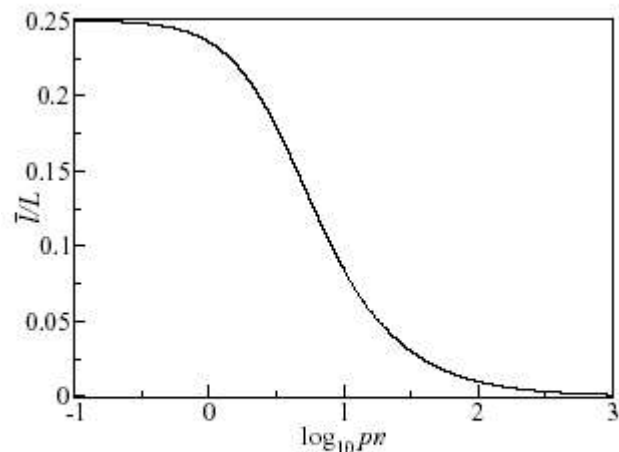


FIG. 17. The normalized average shortest-path length \bar{l}/L of the “smallest-world” network vs. the number $\rho = pL$ of added edges.



FIG. 15. The real “smallest-world” network. Unsociable inhabitants live in this village. Usually, they contact only with their neighbors but some of them attend the church...

complete map of the nd.edu domain of the Web	325, 729	1, 469, 680	$\gamma_i = 2.1$ $\gamma_o = 2.45$
pages of World Wide Web scanned by Altavista in October of 1999	$2.711 \cdot 10^8$	$2.130 \cdot 10^9$	$\gamma_i = 2.1$ $\gamma_o = 2.7$
“————” (another fitting of the same data)			$\gamma_i = 2.10$ $\gamma_o = 2.82$
domain level of the WWW in spring 1997	$2.60 \cdot 10^5$	—	$\gamma_i = 1.94$
inter-domain level of the Internet in December 1998	4389	8256	2.2
net of operating “autonomous systems” in Internet ¹	6374	13641	2.2
router level of the Internet in 1995	3888	5012	2.5
router level of the Internet in 2000 ²	$\sim 150,000$	$\sim 200,000$	~ 2.3
citations of the ISI database 1981 – June 1997	783, 339	6, 716, 198	$\gamma_i = 3.0$
“————” (another fitting of the same data)			$\gamma_i = 2.9$
“————” (another estimate from the same data)			$\gamma_i = 2.5$
citations of the Phys. Rev. D 11-50 (1975-1994)	24, 296	351, 872	$\gamma_i = 3.0$
“————” (another fitting of the same data)			$\gamma_i = 2.6$
“————” (another estimate from the same data)			$\gamma_i = 2.3$
citations of the Phys. Rev. D (1982-June 1997)	—	—	$\gamma_i = 1.9$
collaboration network of movie actors	212, 250	61, 085, 555	2.3
“————” (another fitting of the same data)			3.1
collaboration network of MEDLINE	1, 388, 989	$1.028 \cdot 10^7$	2.5
collaboration net collected from mathematical journals	70, 975	0.132×10^6	2.1
collaboration net collected from neuro-science journals	209, 293	1.214×10^6	2.4
networks of metabolic reactions	$\sim 500 - 800$	$\sim 1500 - 3000$	$\gamma_i = 2.2$ $\gamma_o = 2.2$
net of protein-protein interactions (yeast proteome) ³	1870	2240	~ 2.5
word web ⁴	470, 000	17, 000, 000	1.5
digital electronic circuits	2×10^4	4×10^4	3.0
telephone call graph ⁵	47×10^6	8×10^7	$\gamma_i = 2.1$
web of human sexual contacts ⁶	2810	—	3.4
food webs ⁷	93 – 154	405 – 366	~ 1

Безмасштабные сети – идея предпочтительного линкинга
(популярность привлекательна)

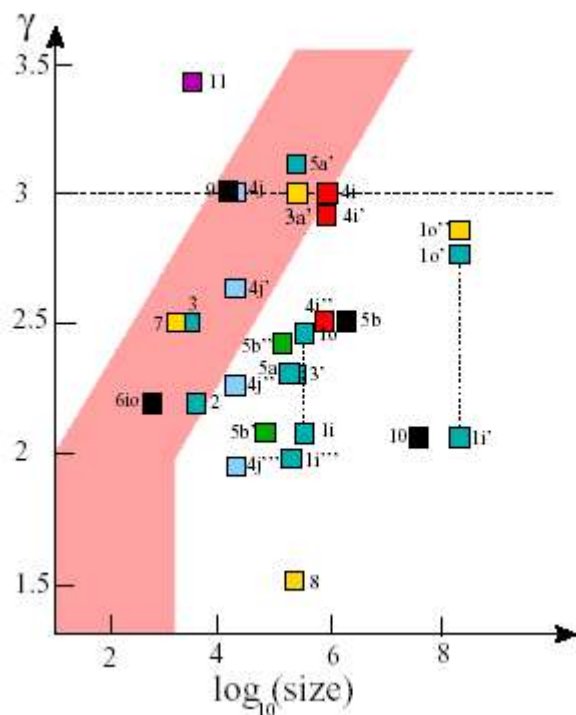
Механизмы: новые вершины

-добавление связей между старыми (чем старше, тем богаче)

-ГА

-старение

Показатели безмасштабных сетей



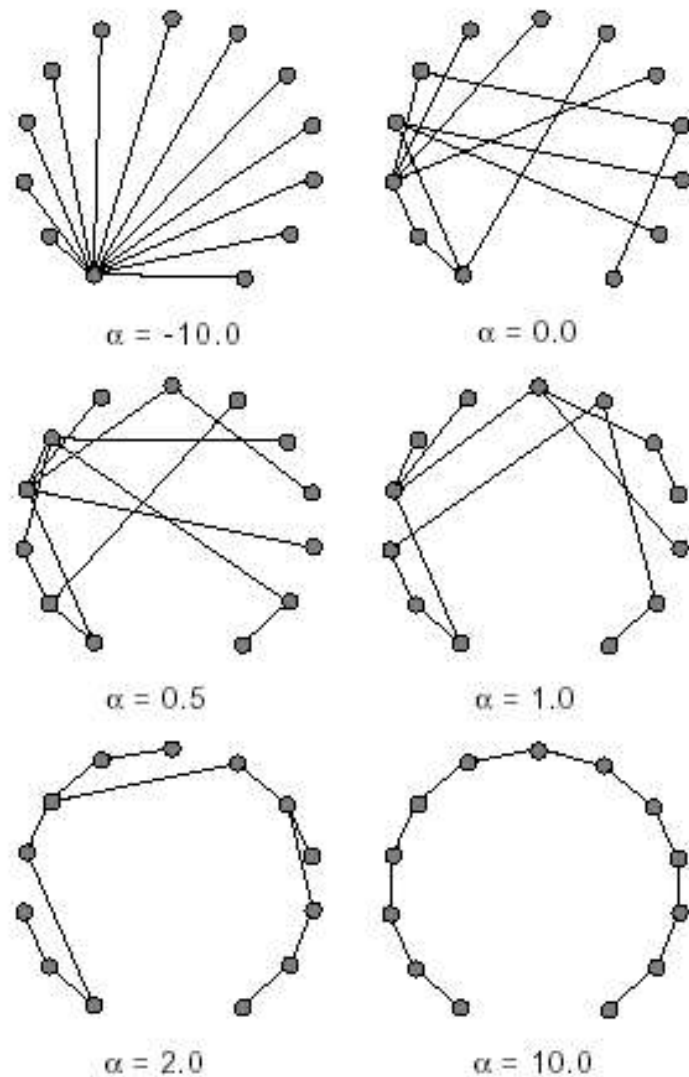


FIG. 29. Change of the structure of the network with aging of vertices with increase of the aging exponent α . The aging is proportional to $\tau^{-\alpha}$, where τ is the age of a vertex. The network grows clockwise starting from the vertex below on the left. At each time step, a new vertex with one edge is added.

Конденсация вершин – образование вершиной связей с конечной долей вершин

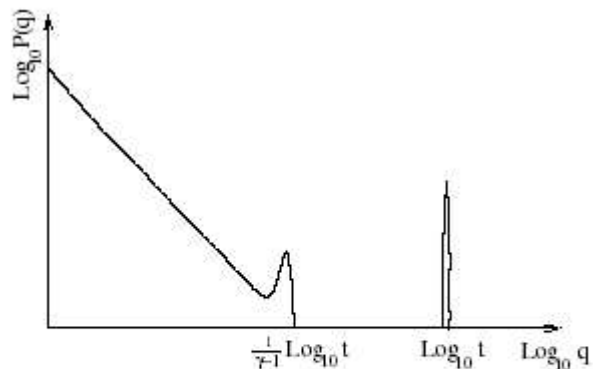


FIG. 33. Schematic plot of the degree distribution of the network with one vertex, the fitness of which exceeds the threshold value [175]. The peak is due to edges “condensed” on the strong vertex. A hump at the cutoff of the continuum part of the distribution is a trace of initial conditions (see Sec. IX D and Ref. [166]).

Скоррелированность связности соседних вершин в растущих сетях

Ускоренный рост – число ребер растет быстрее числа вершин (Интернет, www, цитирование, соавторство)

Умирающие сети

Атаки и повреждения

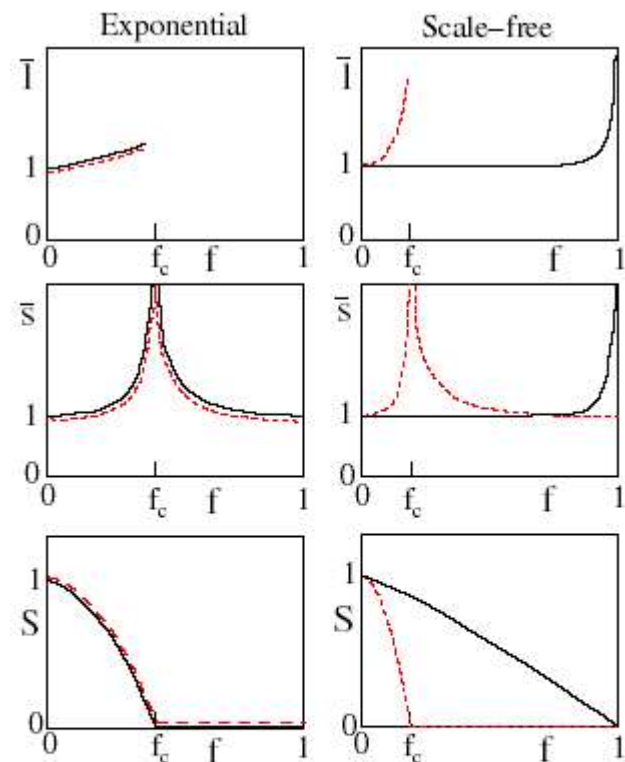


FIG. 39. Schematic plots of the effect of intentional and random damage (attack and failures) on the characteristics of exponential undirected networks and scale-free undirected ones with exponent $\gamma \leq 3$ [59]. The average shortest path between vertices, \bar{l} , the size of the largest connected component, \bar{s} , and the average size of isolated clusters, $\bar{\sigma}$ are plotted vs. the fraction of removed vertices $f \equiv 1 - p$. The networks are large. The solid lines show the effect of the random damage. The effect of the intentional damage is shown by the dashed lines. For the exponential networks, both kinds of damage