# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ.

*(Никуличев Ю.В. к.ф.-м.н., с.н.с. ИТПМ СОРАН, Новосибирск)*

# Физическая и математическая модели

Изучение любого объекта или процесса начинается с построения
**физической модели**
– виртуальности упрощенной, но достаточно близкой
по интересующим исследователя характеристикам к реальности
и позволяющей построить как можно более простую
**математическую модель**
- совокупность математических соотношений,
описывающих взаимосвязь объектов физической модели.
Объекты физической модели это множество величин,
которые по своим свойствам подразделяются на:
- переменные состояния или фазовые переменные, (то, что получается),
- параметры модели, (то, что задаем).

Параметры это величины, которые либо остаются постоянными
в процессе функционирования модели, либо изменяются по заданным законам.

# **Динамическая система.**

Фазовые переменные **динамической системы**

являются функциями независимой переменной - времени.

**Динамическая система** может включать в себя

набор функций времени, называющихся **управлениями.**

Мы рассматриваем динамическую систему, заданную

в нормальной форме Коши с управлениями без обратной связи.

$$\dot{y} = f(y, u(t), p, t). \qquad \textbf{(1)}$$

$y$ - вектор фазовых переменных;

$f$ - вектор обобщенной силы;

$u$ - вектор управлений;

$p$ - параметры модели;

$t$ - независимое переменное - время $\quad t \in T,\ T = [t_0, t_f].$

# Полет реактивного снаряда на максимальную дальность.

## Физическая модель:

- ракета – материальная точка;

- Земля плоская и не вращается;

- атмосфера отсутствует;

- ускорение свободного падения $g$ постоянно;

- двигатель безынерционный, тяга реактивная, формула для тяги $P=c\beta$.

# Математическая модель

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v, \\
\dot{y} &= w, \\
\dot{v} &= \frac{c\beta}{m} Cos\omega, \\
\dot{w} &= \frac{c\beta}{m} Sin\omega - g, \\
\dot{m} &= -\beta.
\end{aligned}
\qquad (0)
$$

с - задаваемый коэффициент;

$\beta$ - расход топлива;

$m$ - масса РС;

$\omega$- угол между направлением тяги двигателей и плоскостью Земли.

Краевые условия:

$$(0): \; t_0 = 0, \; x_0 = y_0 = v_0 = w_0 = 0, \; m_0 = m_p + m_T;$$

$$(f): t = T_a, \, m_f = m_p; t_f = T_a + T_p, \, y_f = 0,$$

Естественные ограничения: $y \geq 0, \; 0 \geq \beta \geq \beta_{\max}.$

# Оптимизация

Безусловная оптимизация:

$$Min\,G(x), \quad x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}. \qquad \textbf{(2)}$$

Необходимое условие минимума: $\dfrac{\partial G}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n.$ **(3)**

Достаточное условие минимума: $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} > 0, \quad i = 1,2,\ldots,n.$ **(4)**

Условная оптимизация:

$$Min\,G(x), \quad x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, \quad f_j(x) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,m. \qquad \textbf{(5)}$$

Метод неопределенных множителей Лагранжа: вводится вектор

$\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$. И составляется функция (Гамильтона)

$$H = G(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x). \qquad \textbf{(6)}$$

Векторы $\lambda$ и $x$ определяются из $n$ необходимых условий для (6) и $m$ условий (5)

# Оптимизация динамической системы

**Математическая постановка задачи:**

$$\dot{y} - f(y(t), p, u(t)) = 0,\ \ \mathrm{u}(t) \in D = \left\{ \mathrm{u} : \mathrm{u}^{min} \le \mathrm{u}(t) \le \mathrm{u}^{max} \right\};$$

$$y(t_0) \Rightarrow u(\tau) \Rightarrow y(t_f) \in B = \left\{ y_{\mathrm{i}} : \ \left| y_{\mathrm{i}} - y_i^{*} \right| \le \Delta_{\mathrm{i}},\ \ \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}} \right\};$$

$$\psi(y, p, \mathrm{u}) \le 0;\ \ \varphi(t_f) = \varphi(y(t_f), p, \mathrm{u}(t_f)) = 0; \tag{7}$$

$$G(y(t_f), t_f) \Rightarrow \min_{\mathrm{u}(t),\, t_f},\quad t_f \in \left[0, T_{\max}\right].$$

**Задача Майера**:

$$G = \Phi(y(t_f),t_f) - \Phi(y(t_0),t_0)$$

**Задача Лагранжа:**

$$G = \int_{t_0}^{t_f} F(y(t),t)\,dt$$

**Задача Больца:**

$$G = \Phi(y(t_f),t_f) - \Phi(y(t_0),t_0) + \int_{t_0}^{t_f} F(y(t),t)\,dt$$

# Принцип максимума

**Сопряженная система уравнений – уравнения Эйлера-Лагранжа:**

$$\dot{\psi}_k = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \psi_i . \qquad (8)$$

**Функция Гамильтона:**

$$H(f, y, u) = \sum_{i=1}^{n} f_i \psi_i . \qquad (9)$$

Принцип максимума утверждает: Для того, чтобы кривая $y^*, u^*$ доставляла сильный минимум функционалу в задаче Майера необходимо существование совершенно ненулевого непрерывного вектора $\psi$, определяемого уравнениями (8), при котором:

1) Функция $H$ (9) достигает максимума по $u$;

*2)* выполняется условие трансверсальности

$$\left[\delta G - H \delta t + \psi \cdot \delta y\right]_0^f = 0 \qquad (10)$$

# Решение задачи полета РС на максимальную дальность

**Уравнения Эйлера-Лагранжа:**

$$\dot\psi_1 = 0,$$
$$\dot\psi_2 = 0,$$
$$\dot\psi_3 = -\psi_1, \qquad (11)$$
$$\dot\psi_4 = -\psi_2,$$
$$\dot\psi_5 = \frac{c\beta}{m^2} k_\omega .$$

**Функция Гамильтона:**

$$H = v\psi_1 + w\psi_2 - g\psi_4 + k_\beta \beta . \qquad (12)$$

**Функции переключения:**

$$k_\beta = \frac{c k_\omega}{m} - \psi_5, \quad k_\omega = \psi_3 Cos\omega + \psi_4 Sin\omega. \qquad (13)$$

**Первый интеграл**: $H=C=const.$

**Условие слабого минимума:**

$$\frac{\partial H}{\partial \omega}=\frac{c\beta}{m}[\psi_4 Cos\omega-\psi_3 Sin\omega]=0,\quad \frac{\partial^2 H}{\partial \omega^2}(\delta\omega)^2=-\frac{c\beta}{m}k_\omega(\delta\omega)^2\le 0 \qquad \textbf{(14)}$$

**Условие трансверсальности:**

$$\psi_1(T)=1,\quad C=0,\quad \psi_3(T)=0,\quad \psi_4(T)=0. \qquad \textbf{(15)}$$

**Отсюда и из первых 4-х уравнений (11) следует:**

$$\psi_1=1,\quad \psi_2=C_2,\quad \psi_3=T-t,\quad \psi_4=C_2(T-t).$$

**Из (14) находим программу изменения направления тяги:**

$$tg\omega=\frac{\psi_4}{\psi_3}=C_2,\quad Cos\omega=\frac{\psi_3}{k_\omega},\quad Sin\omega=\frac{\psi_4}{k_\omega}. \qquad \textbf{(16)}$$

**Условие максимума H по β определяет программу изменения расхода топлива - две дуги экстремали:**

$$\begin{cases} \beta = \beta_{\max} & \textit{при} \quad k_\beta > 0, \\ \beta = 0 & \textit{при} \quad k_\beta < 0, \\ tg\omega = C_2 & \textit{при} \quad k_\omega = \sqrt{\psi_3^2 + \psi_4^2}. \end{cases} \tag{18}$$

**Поскольку**

$$\dot{k}_\beta = \frac{c}{m}\dot{k}_\omega, \tag{19}$$

**Из формул (16) следует:**

$$\dot{k}_\beta = -\frac{c}{m}\sqrt{1 + C_2^2}. \tag{20}$$

**Интегрирование (20) дает:**

$$k_\beta = \frac{c}{\beta_{\max}}\sqrt{1+C_2^2}\,\ln\frac{m_0-\beta_{\max}t}{m_0-\beta_{\max}t_a}, \quad t\in[0,t_a],$$

$$k_\beta = \frac{c}{m_p}\sqrt{1+C_2^2}\,(t_a-t), \qquad t\in[t_a,T]. \tag{21}$$

$$t=t_a \to k_\beta = 0.$$

**Из условий на правом конце и первого интеграла имеем:**

$$y(t_a)+w(t_a)(T-t_a)-\frac{g(T-t_a)^2}{2}=0,$$

$$v(t_a)+C_2[w(t_a)-g(T-t_a)]=0. \tag{22}$$

**Вторая функция переключения, согласно (18):**

$$k_\omega = (T-t)\sqrt{1+C_2^2}. \tag{23}$$

## Активный участок:

$$t_a = \frac{m_T}{\beta_{\max}}. \tag{24}$$

**Уравнения активного полета:**

$$x(t) = \frac{c}{\sqrt{1 + tg^2 \omega}} [t + (\frac{m_0}{\beta_{\max}} - t) \ln(1 - \frac{\beta_{\max} t}{m_0})] + v_0 t + x_0,$$

$$v(t) = v_0 + \frac{c}{\sqrt{1 + tg^2 \omega}} \ln(\frac{m_0}{m_0 - \beta_{\max} t}), \tag{25}$$

$$y(t) = \frac{cs}{\sqrt{1 + tg^2 \omega}} [t + (\frac{m_0}{\beta_{\max}} - t) \ln(1 - \frac{\beta_{\max} t}{m_0})] + w_0 t + y_0 - \frac{gt^2}{2},$$

$$w(t) = w_0 - gt + \frac{cs}{\sqrt{1 + tg^2 \omega}} \ln(\frac{m_0}{m_0 - \beta_{\max} t}), \qquad m(t) = m_0 - \beta_{\max} t.$$

**Пассивный полет:**

$$\dot{v}(t) = 0,\ v(t) = v_0,\ \ x(t) = x_0 + v_0 t,$$
$$\dot{w}(t) = -g,\ \ w(t) = w_0 - gt,\ y(t) = y_0 + w_0 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{26}$$

**Угол вектора тяги к горизонту:**

$$tg\omega = \frac{v(t_a)}{\sqrt{w^2(t_a) + 2gy(t_a)}}, \tag{27}$$

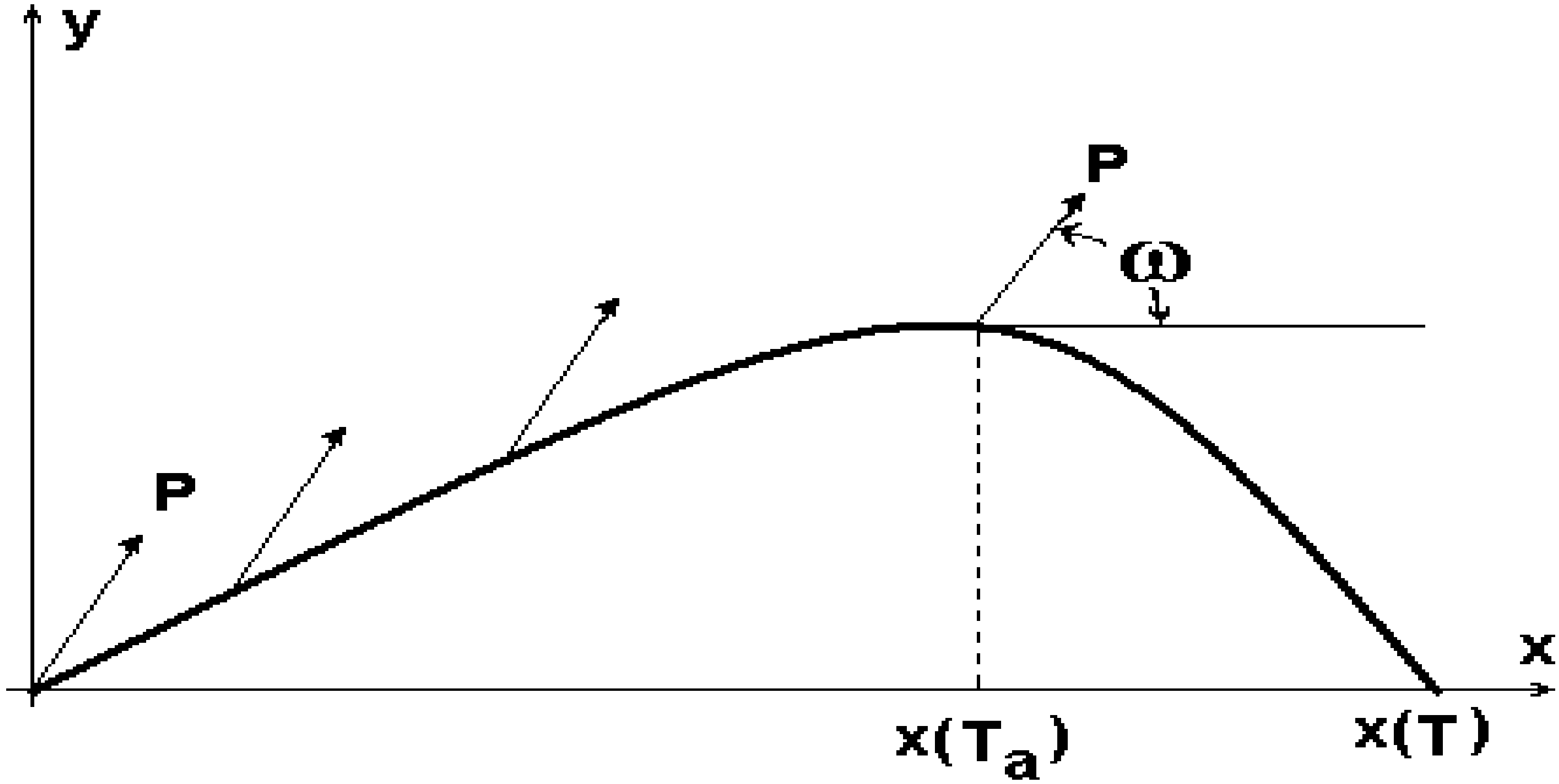



**Рис. 0. Полет реактивного снаряда на максимальную дальность.**

Конкретный пример:

$$m_p = m_T = 20kg,\ P_{\max} = 600н,\ c = 1000m/s.$$

$$T = T_a + T_p = 33.3sek + 55.5sek = 88.8sek.\ \omega = 52^\circ 42',$$

$$x(T) = 29551m,\ \ y(T) = 0m,\ \ v(T) = 420.4m/s\ \ w(T) = -320.7m/s$$

# Проблема Годдарда.

## Физическая модель.

- ракета – материальная точка;
- Земля плоская и не вращается;
- сопротивление атмосферы пропорционально квадрату скорости ракеты;
- силы по оси абсцисс (боковые) отсутствуют;
- ускорение свободного падения *g* постоянно;
- двигатель безынерционный, тяга реактивная и рассчитывается по формуле $P = c\beta$.

## Математическая модель:

$$\begin{cases} \dot{y} = w, \\ \dot{w} = \dfrac{P - Bw^2}{m} - g, \\ \dot{m} = -\dfrac{P}{c}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \dfrac{u(t) - by_2^2}{y_3} - 1, \\ \dot{y}_3 = -u(t). \end{cases} \qquad \textbf{(28)}$$

**Краевые условия:**

$$\tau = 0: \; y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1,$$

$$\tau = T: \; y_1 = \max, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = m_p.$$

## Решение задачи:

**Управление (тяга):**

$$
\begin{cases}
u(t) = 1, & y_3 > m_1 = b y_2^2 (1 + y_2). \\
u(t) = \dfrac{b y_2 (2 + 3 y_2)(b y_2^2 + y_3)}{[b y_2 (2 + 3 y_2) + y_3]}, & m_1 \le y_3 \le m_p \\
u(t) = 0, & y_3 = m_p.
\end{cases}
$$

**Приращение высоты на пассивном участке:**

$$
\delta\ y_1 = \frac{s_1}{s_2} Ln \left| \frac{s_1}{\sqrt{1 + s^2 [y_1(\tau_2)]^2}} \right| + \frac{y_1(\tau_2) \cdot (s - 1)}{s_2} Arctg[s \cdot y_1(\tau_2)],
$$

$$
s = \sqrt{\frac{b}{\mu}}, \quad s_1 = 1 + s \cdot [y_1(\tau_2)]^2, \quad s_2 = \frac{b \cdot \left(1 + [y_1(\tau_2)]^2\right)}{\mu}, \ \mu = 1 - m_p.
$$

**Конкретный пример:**

$$m_0 = 120\,кг, \quad m_p = 24\,кг, \quad P_{\max} = 1412.6\,н, \quad b = 0.003072\,кг/м$$

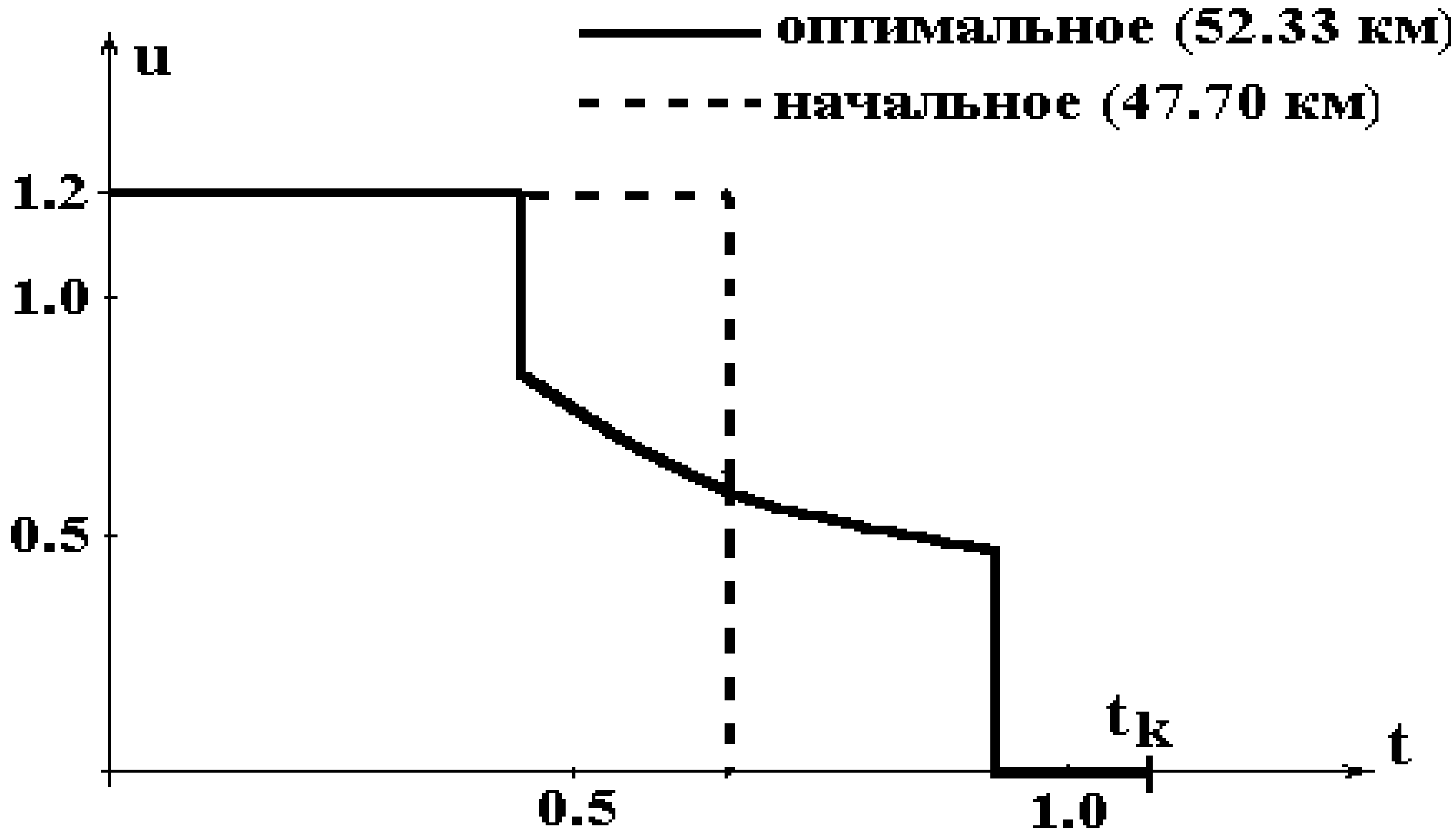



**Рис.1. Вертикальный полет ракеты на максимальную высоту.**

# Метод проектированного градиента

**Задача:**

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, \quad u = \{u_1, u_2, ..., u_m\}, \quad t \in [t_0, t_k],$$

$$x(t_0) = x_0, \quad F_j(x(t_k)) = 0, \quad j = \overline{1, P-1}, \quad F_P = \min. \tag{33}$$

**Дифференциал Гато:**

$$\delta\, u_j = \sum_{i=1}^{P} \mu_i\, G_{ij}(t)$$

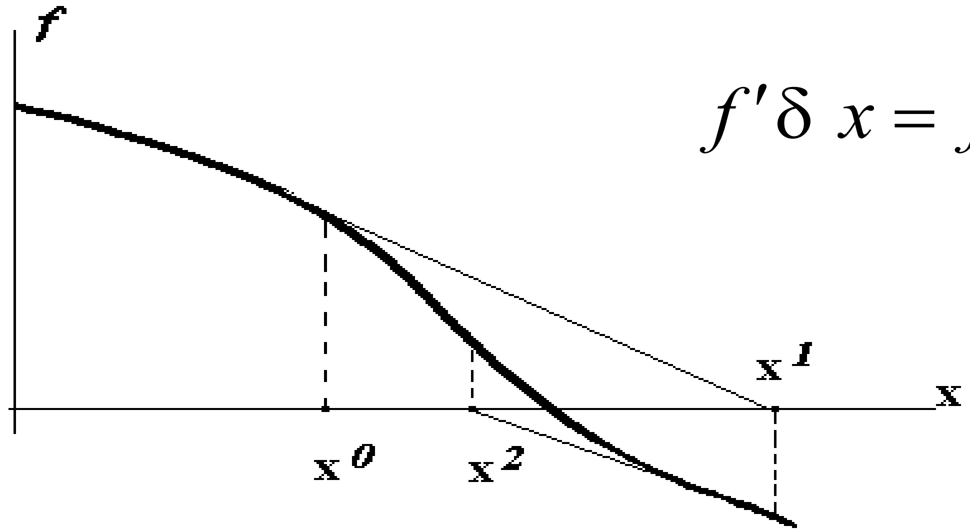
$G_{ij}$ – функция – вариация $j$-го управления, доставляющая максимальное изменение $i$-му функционалу.

Показано: $$G_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} \frac{\partial f_k}{\partial u_j},$$

$$\frac{d\lambda_{ir}}{d\xi} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_r} \lambda_{ij}, \quad \lambda_{ir}(t_k) = \frac{\partial F_i}{\partial x_r},. \ \ \xi \in [t_k, t_0], \quad i = \overline{1, P}, \quad r = \overline{1, n}.$$

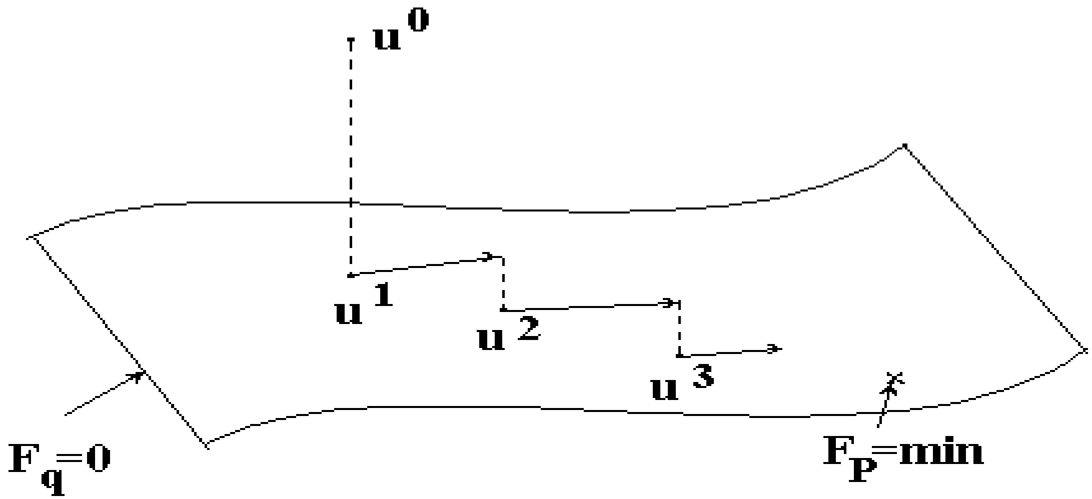
$$\frac{\delta F_i}{\delta \mu_r} = \psi_{ir}, \ \ \dot{\psi}_{ir} = -\sum_{j=1}^{m} G_{ij}(t)\, G_{rj}(t), \ \ \psi_{ir}(t_k) = 0, \quad i, r = \overline{1, P}. \tag{34}$$

**Метод Ньютона:**




$$f'\delta\, x = f'(x^{i} - x^{i-1}) = -f(x^{i-1}).$$

**Метод проектированного градиента:**




$$\frac{\delta\, F}{\delta\, u} = -F.$$

# Запуск 2-й ступени АКС на заданную орбиту

**Физическая модель**

- Земля круглая,
- атмосфера отсутствует,
- двигатель – безинерционный ЖРД,
- внешние силы – только гравитационное притяжение Земли,
- система координат связанная (ось $y$ проходит через центр масс АКС и центр Земли),
- боковые силы отсутствуют (плоское движение).

## Математическая модель

$$\dot{y}_1 = \frac{u_2\,(y_1 Cos\,u_1 - y_2 Sin\,u_1)}{(1-y_4)\sqrt{y_1^2 + y_2^2}},$$

$$\dot{y}_2 = \frac{u_2\,(y_1 Sin\,u_1 + y_2 Cos\,u_1)}{(1-y_4)\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + \frac{y_1^2}{1+y_3} - \frac{1}{(1+y_3)^2},$$

$$\dot{y}_3 = y_2, \;\; \dot{y}_4 = -\frac{u_2}{I}.$$

## Граничные условия:

$$t = 0: \;\; y_1 = a\,Cos\,S; \;\; y_2 = a\,Sin\,S; \;\; y_3 = b; \;\; y_4 = 1;$$

$$t = t_k: \;\; F_1 = y_1 - c = 0; \;\; F_2 = y_2 = 0, \;\; F_3 = y_3 - d = 0. \;\; F_4 = y_4 = \max,$$

$$a = \frac{a_0 M}{\sqrt{R_3 g_0}}, \;\; b = \frac{h_0}{R_3}, \;\; c = \sqrt{\frac{R_3}{R_3 - h_k}}, \;\; d = \frac{h_k}{R_3}.$$

## Решение задачи запуска 2-й ступени АКС на орбиту

$M$ – число Маха в момент пуска (скорость в момент пуска), M=10,

$R_З$ – радиус Земли,

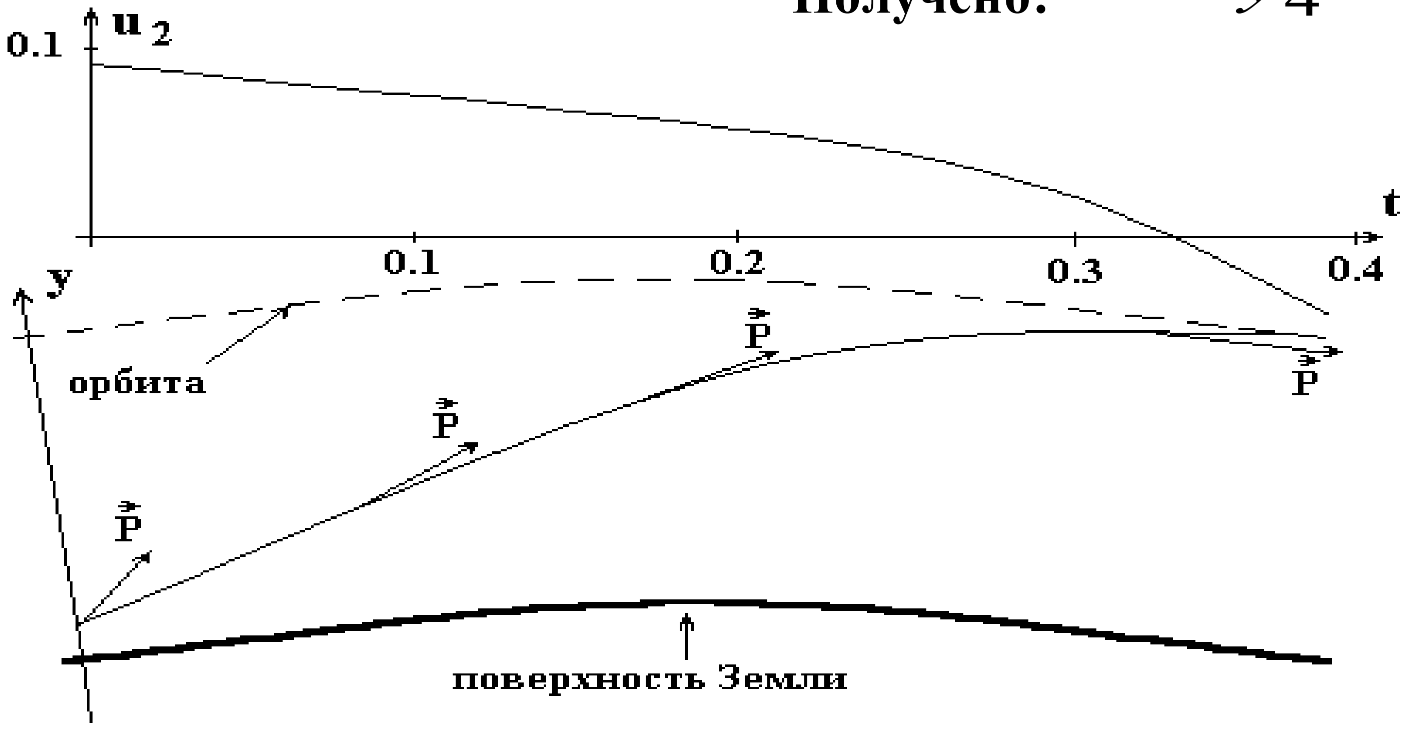
$g_0$ – ускорение свободного падения у поверхности Земли,

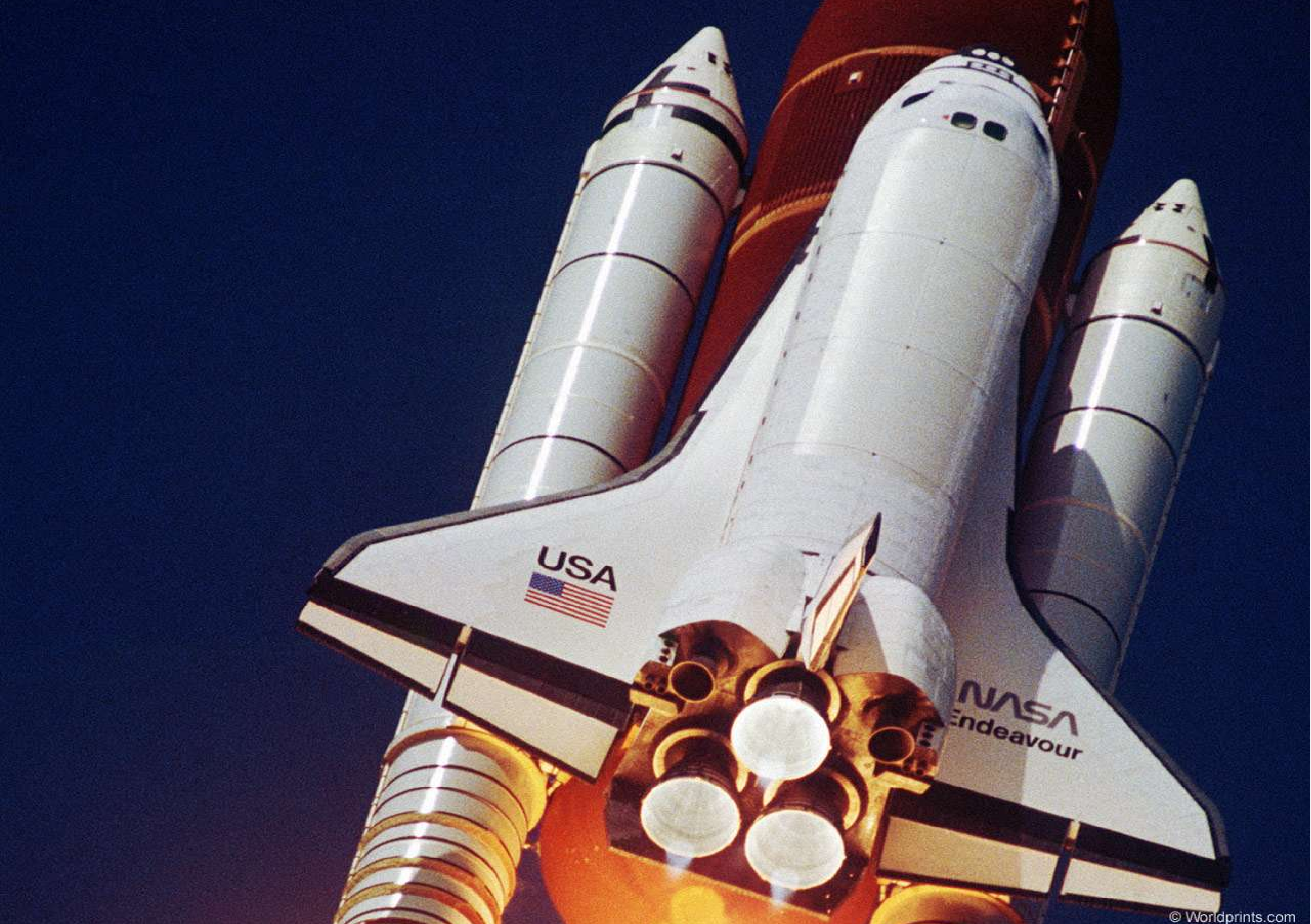
$h_0$ – высота пуска,(30 км.)

$h_k$ - высота орбиты, (200км.).

S - угол вектора скорости в момент пуска (S=0.31).

**Получено:** $y_4 = 0.727.$




USA
NASA
Endeavour

# Оптимальное управление в динамике генных сетей

**Математическая постановка задачи:**

$$\dot{\vec{\mathrm{w}}} = \vec{\varphi}(\vec{\mathrm{w}}(\tau), \vec{\lambda}, \vec{\mathrm{u}}(\tau)),$$

$$\vec{\mathrm{w}}(\tau_0) \Rightarrow \vec{u}(\tau) \Rightarrow \vec{\mathrm{w}}(\tau_k) \in B = \left\{\mathrm{w}_\mathrm{i} : \ \left|\mathrm{w}_\mathrm{i} - 1\right| \le \Delta_\mathrm{i}, \ \ \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}}\right\};$$

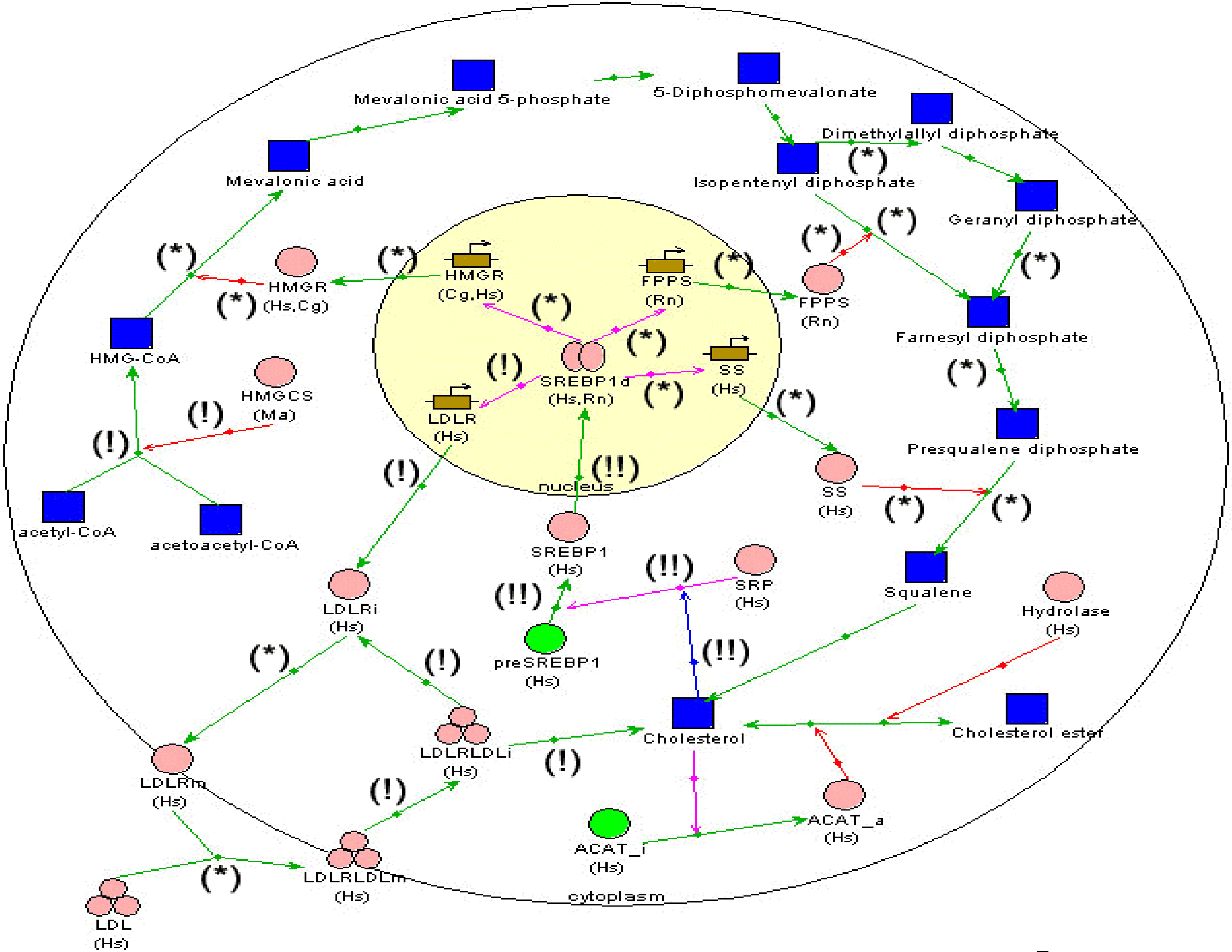
$$\psi_l(\vec{\mathrm{w}}, \vec{\lambda}, \vec{\mathrm{u}}) \le 0, \ \ l \in L; \quad \vec{\varphi}(\tau_k) = \vec{\varphi}(\vec{\mathrm{w}}(\tau_k), \vec{\lambda}, \vec{\mathrm{u}}(\tau_k)) = 0;$$

$$\vec{\lambda} = \alpha_k \bigcup_{k \in K, m \in M} \alpha_\mathrm{m}; \ \ \mathrm{u}_j(\tau) \in D = \left\{\vec{\mathrm{u}} : \vec{\mathrm{u}}^{min} \le \vec{\mathrm{u}}(\tau) \le \vec{\mathrm{u}}^{max}\right\}, \ \ j \in J;$$

$$\mathrm{F}(\vec{\mathrm{w}}(\tau_k), \tau_k) \Rightarrow \min_{\vec{\mathrm{u}}(\tau), \tau_k}, \ \ \tau_k \in \left[0, T_{\max}\right].$$

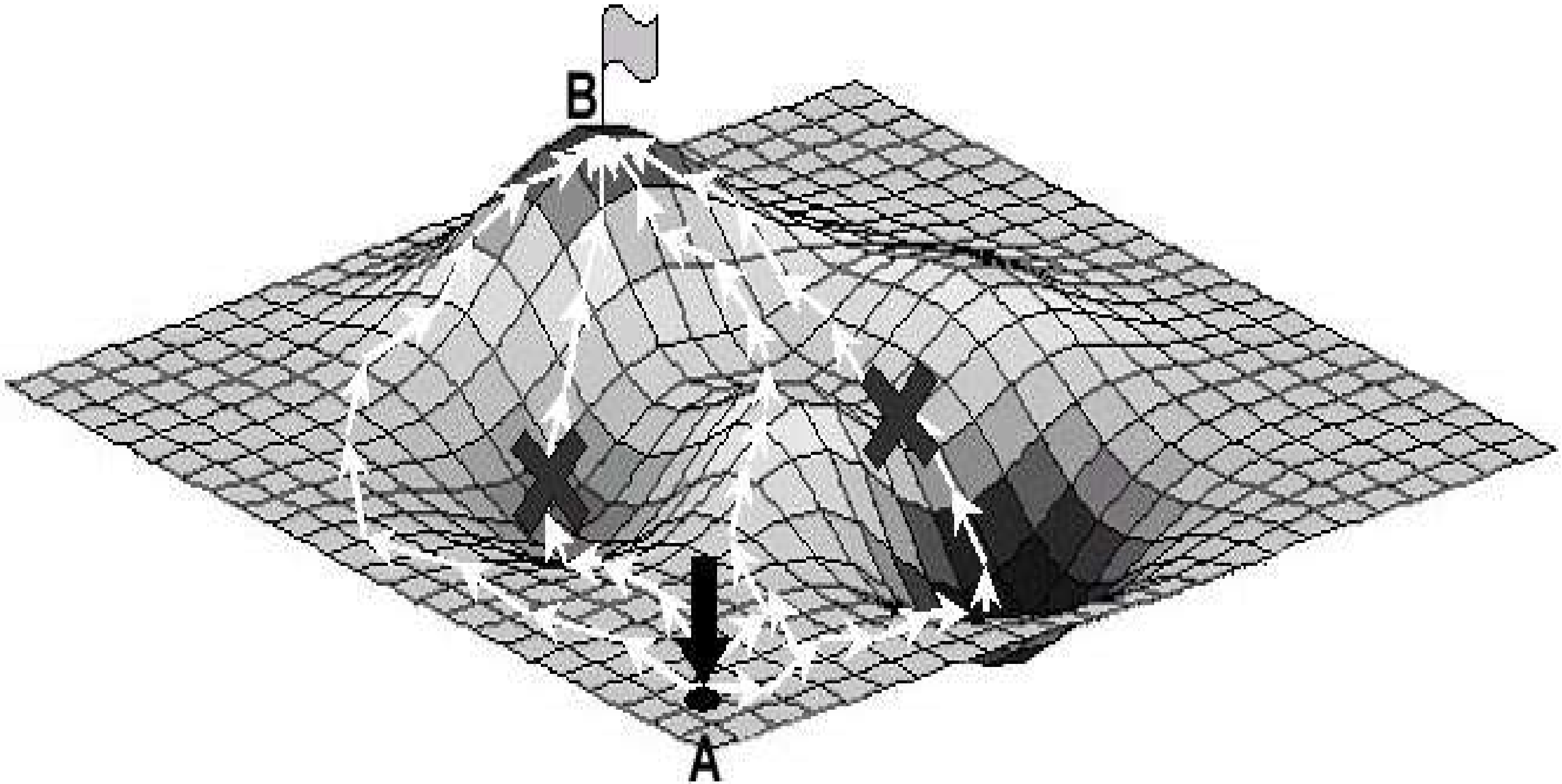
**Биосинтез холестерина:**

n=10, $K$=2, $M$=29, $J$=8, $L$=2. $w_3'(\tau) \ge 0; w_4'(\tau) \le 0.$ $\mathrm{F}(\vec{w}(\tau_k), \tau_k) = \tau_k.$




— активный белок, — неактивный белок, — небелковое вещество, — мультимер
ген, — реакция, — отрицательный регуляторный эффект

## Пути поиска максимума:



# Решение

## 1-й этап:

Положим:
$$F(\vec{w}, \vec{u}) = \frac{1}{2}\sum_i \phi_i^2(\vec{w}, \vec{\lambda}, \vec{u})$$

Требуется найти такие $\tilde{\vec{w}}, \tilde{\vec{u}},$ чтобы $F(\tilde{\vec{w}}, \tilde{\vec{u}}) = \min\limits_{\vec{w}\in B, \vec{u}\in D} F(\vec{w}, \vec{u}) \le \varepsilon_o.$

## 2-й этап

Требуется найти такие $u \in D,\ u(\tau_k) = \tilde{\vec{u}},$ чтобы

$$w_3'(\tau) \ge 0;\quad w_4'(\tau) \le 0,\ \tau \in [0, \tau_k],\qquad \mathrm{F}(\vec{w}(\tau_k), \tau_k) = \tau_k = \min.$$

## Таблица 1.

| | $w_i^*$ | $w_i(0)$ | $w_i(\tau_k)$ | $u_j(\tau_k)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $0.5821084999 \cdot 10^{2}$ | 1.5016989 | 0.8006046 | 119.98 |
| 2 | $0.5495681053 \cdot 10^{4}$ | 1.4614053 | 1.1999876 | 0.0195 |
| 3 | $0.3370067540 \cdot 10^{6}$ | 0.6659124 | 1.0741652 | 1.0014 |
| 4 | $0.7118757840 \cdot 10^{4}$ | 1.4614053 | 1.1997881 | 0.9849 |
| 5 | $0.2238008150 \cdot 10^{6}$ | 52.9910866 | 1.1904768 | 1.4831 |
| 6 | 0.5937566109 | 1.5016989 | 0.9169163 | 1.4829 |
| 7 | $0.3999999762 \cdot 10^{6}$ | 1.0000000 | 0.9849196 | 0.8731 |
| 8 | $0.1014834695 \cdot 10^{5}$ | 1.0073277 | 1.0004238 | 1.1005 |
| 9 | $0.9851653055 \cdot 10^{4}$ | 0.9924516 | 1.0024357 | |
| 10 | $0.1693993288 \cdot 10^{6}$ | 0.6940581 | 0.9691837 | |

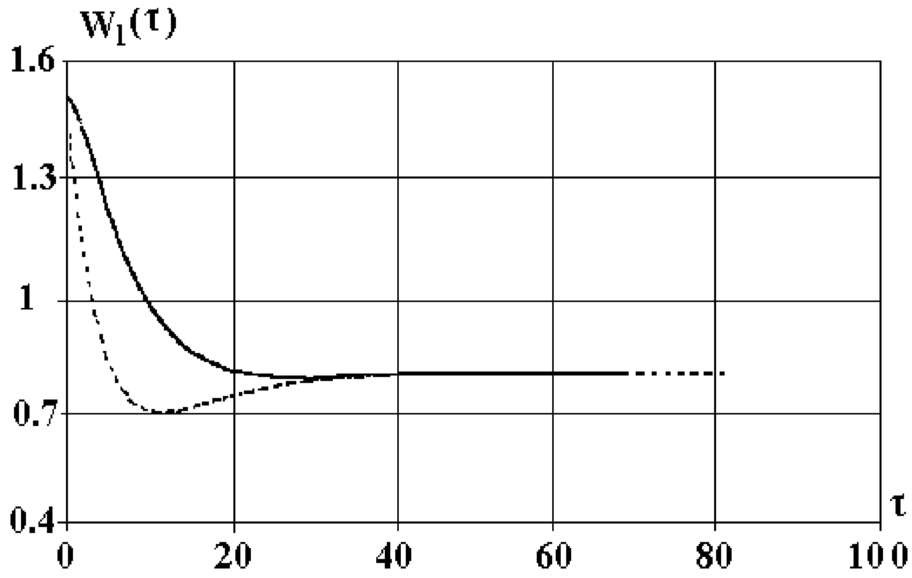


Fig. 1

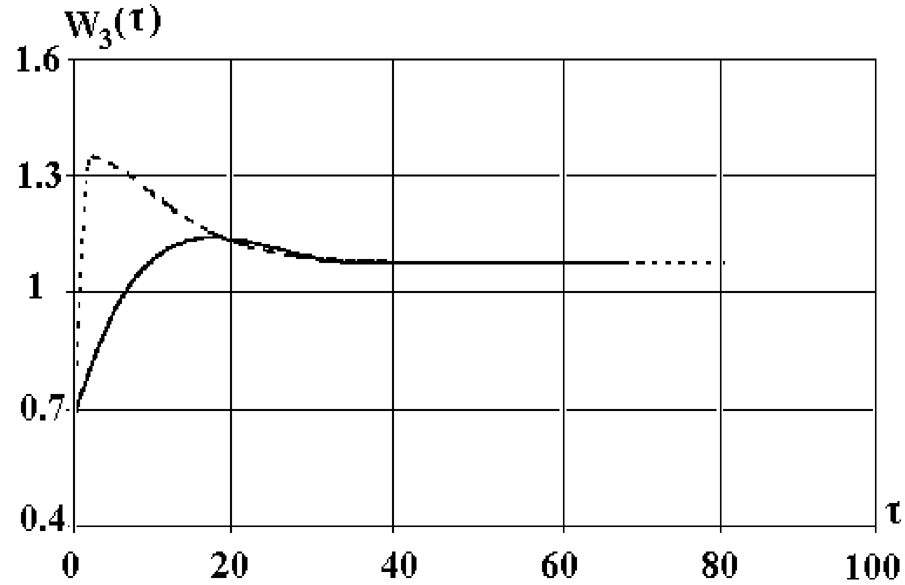


Fig. 2

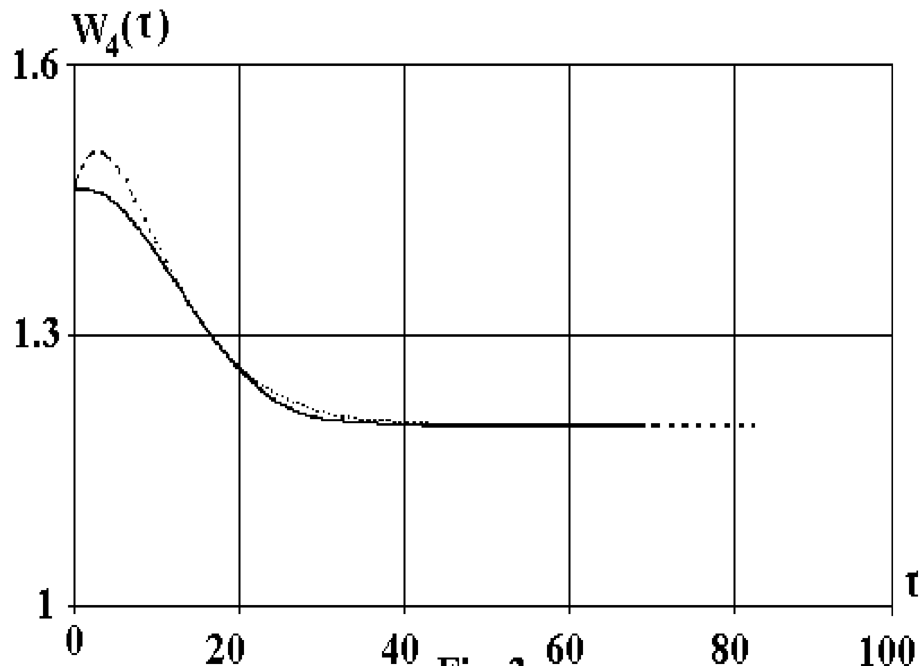


Fig. 3

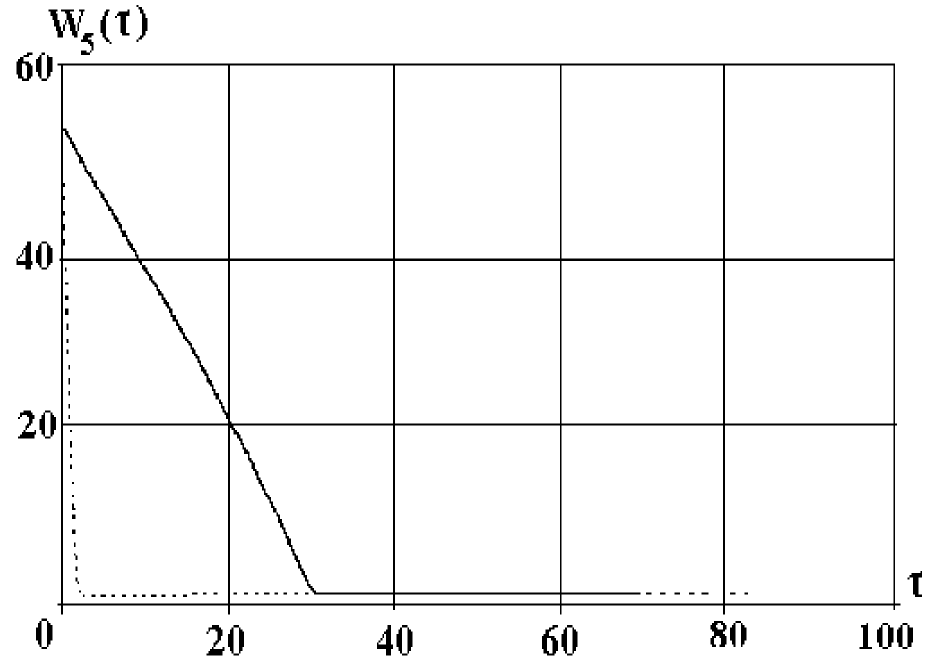


Fig. 4