

Лекция 10

Доказав теорему Ляпунова (об устойчивости) (лекция 9), рассмотрим следствие из этой теоремы.

Следствие. Если в теореме Ляпунова (об устойчивости) вместо условия Л3 выполнено более сильное условие Л3.бис, то нулевое решение автономной системы

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad f(0)=0, \quad (1)$$

асимптотически устойчиво при $t > 0$.

Доказательство. Покажем, что в этом случае норма решения $y(t, y^0)$ задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad f(0)=0, \quad y = y^0 \text{ при } t = 0, \quad (2)$$

при $\|y^0\| \leq \rho_0$, где ρ_0 – некоторое число, существование которого утверждается теоремой о существовании решения в целом, стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Предположим, что это не так. Тогда существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, такая, что $\|y(t_k, y^0)\| \rightarrow \gamma \neq 0$. Следовательно, существует k_0 такое, что

$$\|y(t_k, y^0)\| \geq \gamma/2, \quad k \geq k_0.$$

При этом в силу условий Л1, Л2

$$H(y(t_k, y^0)) \geq \delta(\gamma) > 0, \quad k \geq k_0.$$

Рассмотрим отрезок $[t_k, t_{k+1}]$, $k \geq k_0$. Покажем, что

$$H(y(t, y^0)) \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{для всех } t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Действительно, как известно, функция Ляпунова не возрастает вдоль решения задачи Коши. А так как $H(y(t_{k+1}, y^0)) \geq \delta/2$, то

$$H(y(t, y^0)) \geq H(y(t_{k+1}, y^0)) \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{для всех } t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Отсюда следует, что

$$H(y(t, y^0)) \geq \frac{\delta}{2}, \quad t \geq t_{k_0}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что существует $\alpha(\delta) > 0$ такое, что $\|y(t, y^0)\| \geq \alpha > 0$. Поэтому, принимая во внимание условие Л3.бис, мы можем утверждать, что $G(y(t, y^0)) \geq \beta(\alpha) > 0$, т.е.

$$\frac{d}{dt}H(y(t, y^0)) \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_j}(y(t, y^0)) f_j(y(t, y^0)) \equiv -G(y(t, y^0)) \leq -\beta(\alpha).$$

Проинтегрировав обе части последнего неравенства от t_{k_0} до t , получаем:

$$H(y(t, y^0)) \leq H(y(t_{k_0}, y^0)) - \beta(\alpha)(t - t_{k_0}).$$

Отсюда следует, что для достаточно больших t функция Ляпунова становится отрицательной, что противоречит ее определению. Тем самым установлена асимптотическая устойчивость нулевого решения. **Следствие доказано.**

Теорема Ляпунова (о неустойчивости). Пусть функция $H(y)$ удовлетворяет условиям Л1, Л2. Если при этом существует функция

$$F(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_j}(y) f_j(y),$$

такая, что $F(y) > 0$, $0 < \|y\| \leq R$ и $F(0) = 0$, то нулевое решение векторного уравнения (1) неустойчиво при $t > 0$.

Доказательства этой теоремы мы не приводим.

Заметим, что утверждения теорем Ляпунова об устойчивости и неустойчивости зависят от знака производной функции $H(y)$ вдоль решения $y(t, y^0)$ задачи Коши (2):

$$\frac{d}{dt}H(y(t, y^0)) \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} H(y(t, y^0)) f_j(y(t, y^0)),$$

поскольку в теореме Ляпунова (об устойчивости)

$$\frac{d}{dt}H(y(t, y^0)) = -G(y(t, y^0)),$$

а в теореме Ляпунова (о неустойчивости)

$$\frac{d}{dt}H(y(t, y^0)) = F(y(t, y^0)).$$

Завершим курс лекций двумя примерами исследования на устойчивость стационарных решений (точек покоя) автономной системы.

Пример 1. Как известно, уравнение движения математического маятника имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin(x) = 0,$$

где x – угол отклонения маятника от положения равновесия $x = 0$. Воспользуемся обозначениями:

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{dx}{dt} = \frac{dy_1}{dt}.$$

В результате приходим к описанию движения математического маятника автономной системой:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2) = y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2) = -\sin(y_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Стационарные решения (3) определяются как решения системы:

$$y_2 = 0, \quad \sin(y_1) = 0,$$

т.е. $y_1 = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $y_2 = 0$. Очевидно, в силу периодичности функции $\sin(y_1)$ достаточно рассмотреть устойчивость только двух точек покоя:

$$y^{[1]} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y^{[2]} = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Попытаемся вначале применить теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. С этой целью составим матрицу производных

$$f_y(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(y_1) & 0 \end{bmatrix}.$$

В первой точке покоя матрица A первого приближения имеет вид:

$$A = f_y(y^{[1]}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как собственными числами матрицы A являются $\lambda_1 = +i$, $\lambda_2 = -i$, то первое приближение оставляет вопрос о характере устойчивости стационарного решения без ответа.

Во второй точке покоя

$$A = f_y(y^{[2]}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом собственные числа матрицы A равны: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Таким образом, в этом случае, согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению, рассматриваемое стационарное решение неустойчиво при $t > 0$.

Вернемся к первой точке покоя. Покажем, что функция

$$H(y) = \frac{y_2^2}{2} + \int_0^{y_1} \sin(u) du = \frac{y_2^2}{2} + 1 - \cos(y_1)$$

является функцией Ляпунова для автономной системы (3). Действительно, выполнение условий Л1, Л2 очевидно. Кроме того,

$$G(y) = -\left[\frac{\partial H}{\partial y_1}(y)f_1(y) + \frac{\partial H}{\partial y_2}(y)f_2(y)\right] = -[\sin(y_1)y_2 + y_2(-\sin(y_1))] \equiv 0.$$

Это позволяет нам утверждать, что, согласно теореме Ляпунова (об устойчивости), нулевое стационарное решение устойчиво при $t > 0$. Попутно заметим, что выбранная функция Ляпунова представляет полную энергию математического маятника.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим устойчивость нулевого решения следующей автономной системы

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \alpha y_1 - y_2 - y_1(y_1^2 + y_2^2) \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 + \alpha y_2 - y_2(y_1^2 + y_2^2) \end{aligned} \quad (4)$$

где α - параметр. В данном случае матрица A первого приближения имеет вид:

$$A = f_y(0) = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Собственными числами матрицы A являются: $\lambda_1 = \alpha + i$, $\lambda_2 = \alpha - i$. Следовательно, применяя теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, приходим к выводу о том, что при $\alpha < 0$ нулевое решение (4) асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ нулевое решение неустойчиво.

Устойчивость нулевого решения (4) при $\alpha = 0$ определим с помощью функции Ляпунова

$$H(y) = y_1^2 + y_2^2.$$

Действительно, указанная функция, удовлетворяет условиям Л1 и Л2, и, кроме того,

$$\begin{aligned} G(y) &= -\left[\frac{\partial H}{\partial y_1}(y)f_1(y) + \frac{\partial H}{\partial y_2}(y)f_2(y)\right] = \\ &= -[2y_1(-y_2 - y_1(y_1^2 + y_2^2)) + 2y_2(y_1 - y_2(y_1^2 + y_2^2))] = -2(y_1^2 + y_2^2)^2, \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено условие Л3.бис, что доказывает, согласно следствию из теоремы Ляпунова (об устойчивости), асимптотическую устойчивость нулевого решения (4) при $t > 0$, если $\alpha = 0$.

Продолжим изучение автономной системы (4), выполнив переход к полярным координатам:

$$y_1(t) = r(t) \cos(\varphi(t)), \quad y_2(t) = r(t) \sin(\varphi(t)). \quad (5)$$

В результате имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно производных:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} &= \alpha r \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) - r^3 \cos(\varphi) \\ \frac{dr}{dt} \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} &= r \cos(\varphi) + \alpha r \sin(\varphi) - r^3 \sin(\varphi). \end{aligned}$$

После ее разрешения получаем вместо (4) автономную систему относительно функций $r(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\frac{dr}{dt} = 2r^2(\alpha - r^2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

Рассмотрим стационарные решения дифференциального уравнения относительно r :

$$\frac{dr}{dt} = f(r) = 2r^2(\alpha - r^2). \quad (6)$$

При $\alpha \leq 0$ единственным стационарным решением (6) является нулевое решение, которое уже было исследовано нами на устойчивость как нулевое решение автономной системы (4).

При $\alpha > 0$ кроме нулевого решения уравнение (6) имеет еще одно стационарное решение: $r(t) \equiv \sqrt{\alpha}$. Воспользуемся для определения его устойчивости теоремами Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Поскольку

$$\frac{df}{dr}(r) = \alpha - 3r^2 = -2\alpha < 0 \quad \text{при} \quad r = \sqrt{\alpha},$$

то второе стационарное решение асимптотически устойчиво при $t > 0$. (Напомним, что при $\alpha > 0$ нулевое решение неустойчиво.) С учетом (5) это означает, что графики всех решений, представленных в фазовой плоскости, т.е. в плоскости (y_1, y_2) , стремятся к графику окружности радиуса $\sqrt{\alpha}$ при $t \rightarrow \infty$. Последнее утверждение можно доказать непосредственно, используя для этого точное решение $r = r(t)$ уравнения (6) в виде обратной функции $t = t(r)$.

Действительно, функция $t(r)$, определяемая из задачи Коши

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{2r^2(\alpha - r^2)}, \quad t = 0 \text{ при } r = r_0, \quad (7)$$

$$r_0 > 0, \quad r_0 \neq \sqrt{\alpha},$$

имеет вид:

$$t(r) = \frac{1}{2} \int_{r_0}^r \frac{du}{u^2(\alpha - u^2)} = \frac{1}{2\alpha} \int_{r_0}^r \left[\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \left(\frac{1}{u + \sqrt{\alpha}} - \frac{1}{u - \sqrt{\alpha}} \right) \right] du$$

После интегрирования элементарных функций получаем :

$$t(r) = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \ln \left(\frac{r + \sqrt{\alpha}}{r_0 + \sqrt{\alpha}} \frac{r_0 - \sqrt{\alpha}}{r - \sqrt{\alpha}} \right) \right].$$

Отсюда следует, что $t(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \sqrt{\alpha}$ независимо от задания r_0 в начальном условии задачи Коши (7).

Найденное периодическое решение системы (4) носит название предельного цикла. Возникновение предельного цикла при переходе значений параметра α с отрицательных на положительные, сопровождающееся появлением пары сопряженных чисто мнимых собственных чисел матрицы линейного приближения при $\alpha = 0$, называется бифуркацией (т.е. сменой состояния) Хопфа, или бифуркацией рождения цикла. Предельный цикл является следствием потери устойчивости нулевого решения.

