# Лекция 9

## n4. О критериях усточивости нулевого решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений постоянными коэффициентами.

Как мы убедились, характер устойчивости нулевого решения векторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A\,y \qquad (1)$$

полностью определяется спектром матрицы А. Однако, для матриц достаточно больших размеров вычисление собственных чисел, как правило, представляет проблему. С другой стороны, в данном случае нам важно знать не сами собственные числа, а где они находятся.

**Критерий устойчивости Рауса-Гурвица.**

Как известно, собственные числа (n x n)-матрицы A являются корнями характеристического уравнения :

$$\det(A - \lambda E) = 0\,,$$

которое всегда можно представить в виде:

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0, \qquad (2)$$

Приведем без доказательства условия Рауса-Гурвица, выполнение которых означает, что все корни характеристического уравнения (2) имеют строго отрицательные вещественные части.

С этой целью построим матрицу Гурвица G по коэффициентам $p_0 = 1$, $p_1$, $p_2$, …., $p_n$ характеристмического уравнения (2):

$$G = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 \ldots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & p_n \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Как мы видим, коэффиценты $p_1$, $p_2$, …., $p_n$ заполняют главную диагональ матрицы G. Индексы коэффициентов $p_j$ в каждой строке убывают, начиная с индекса коэффициента первого столбца, согласуясь при этом с индексом коэффициента на главной диагонали. Если индекс j становится больше n, или меньше 0, то такой элемент матрицы считается нулевым.

Например, если (2) – характеристическое уравнение (3 x 3)-матрицы A,

$$\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0,$$

то матрица Гурвица имеет вид:

$$G = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$$

В случае характеристического уравнения (4 x 4)-матрицы А,

$$\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0,$$

имеем:

$$G = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 \\ 0 & p_4 & p_3 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{bmatrix}.$$

**Формулировка критерия Рауса-Гурвица.** Для того чтобы все корни алгебраического уравнения (2) с вещественными коэффициетами имели отрицательные вещественные части необходимо и достаточно, чтобы чтобы все главные диагональные миноры матрицы G

$$\Delta_1 = p_1, \quad \Delta_2 = \det\begin{bmatrix} p_1 & 1` \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_3 = \det\begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix}, \ \ldots, \quad \Delta_n = \det(G)$$

были положительны

$$: \ \Delta_1 > 0, \ \ \Delta_2 > 0, \ \ \Delta_3 > 0, ...., \Delta_n > 0. \qquad (4)$$

Например, для алгебраического уравнения

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0$$

матрица Гурвица имеет вид:

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\Delta_1 = 4 > 0, \ \Delta_2 = 20 > 0, \ \Delta_3 = 80 > 0$. Таким образом, согласно критерию Рауса-Гурвица, все три корня алгебраического уравнения принадлежат левой комплексной полуплоскости. Действительно, в рассматриваемом примере корнями алгебраического уравнения являются $\lambda_1 = -1+ i$, $\lambda_2 = -1- i$, $\lambda_3 = -2$ .

Замечание. Если хотя бы в одном из неравенств (4) знак неравенства поменялся на противоположный, то это означает, что алгебраическое уравнения (2) имеет корни с положительной вещественной частью.

**Матричное уравнение Ляпунова и устойчивость нулевого решения.**

Матричным уравнением Ляпунова, определяющим элементы матрицы Н, называется система линейных алгебраических уравнений, матричная запись которой имеет вид:

$$HA + A^* H = -C, \qquad (5)$$

где А и С – заданные матрицы, $A^*$- транспонированная матрица.

Существует непосредственная связь между решением матричного уравнения Ляпунова и устойчивостью нулевого решения векторного уравнения (1).

**Теорема.** Пусть все собственные числа $\lambda_j$ , $j=1,2,,,,n,$ матрицы А векторного уравнения (1) принадлежат строго левой комплексной полуплоскости. Тогда 1) матричное уравнение Ляпунова разрешимо при любой матрице С; 2) если $C = C^*$ (симметричная матрица), то и $H = H^*$; 3) если $C = C^* > 0$ (положительно определенная матрица), то и $H = H^* > 0$ .

**Доказательство.** Предположим вначале, что матричное ураввнение Ляпунова разрешимо относительно матрицы Н. В силу (5) для любого решения y(t) векторного уравнения (1),

$$y(t) = e^{tA} y(0), \qquad (6)$$

имеем тождество:

$$HA\,y(t) + A^* Hy(t) \equiv -Cy(t).$$

После скалярного умножения векторов левой и правой частей тождества на y(t) имеем тождество:

$$(HA\,y(t), y(t)) + (A^* Hy(t), y(t)) \equiv -(Cy(t), y(t)),$$

или

$$(HA\,y(t), y(t)) + (Hy(t), Ay(t)) \equiv -(Cy(t), y(t)).$$

Так как y(t) – решение (1), то последнее тождество можно представить в виде:

$$(H\frac{dy}{dt}(t), y(t)) + (Hy(t), \frac{dy}{dt}(t)) \equiv \frac{d}{dt}(Hy(t), y(t)) \equiv -(Cy(t), y(t)).$$

По условию теоремы $\operatorname{Re}\lambda_j \leq -\delta < 0, j=1,2,,,,n$ . Поэтому (следствие из леммы Гельфанда – Шилова)

$$\|y(t)\| = \|e^{tA} y(0)\| \leq ce^{-\frac{\delta t}{2}} \|y(0)\|, \ t > 0.$$

Следовательно, интегрируя тождество

$$\frac{d}{dt}(Hy(t),y(t)) \equiv -(Cy(t),y(t))$$

от нуля до $+\infty$, получаем:

$$(Hy(0),y(0)) \equiv \int_0^\infty (Cy(t),y(t))dt.$$

Подставим сюда выражение y(t) (6):

$$(Hy(0),y(0)) \equiv \int_0^\infty (Ce^{tA)}y(0),e^{tA}y(0))dt \equiv \int_0^\infty (e^{tA^*}Ce^{tA}y(0),y(0))dt \ \equiv ([\int_0^\infty e^{tA^*}Ce^{tA}dt]\,y(0),y(0))$$

Здесь учтено, что $(e^{tA})^* = e^{tA^*}$. Отметим также, что в силу следствия из леммы Гельфанда – Шилова интеграл в последнем тождестве представляет некоторую числовую матрицу. Поскольку вектор y(0) произволен, то тождество имеет место, если

$$H = \int_0^\infty e^{tA^*}Ce^{tA}dt\,. \qquad (7)$$

Проверим, что матрица (7) действительно является решением матричного уравнения Ляпунова. С этой целью составим выражение:

$$HA + A^*H = \int_0^\infty e^{tA^*}\,Ce^{tA}dt\,A + A^*\int_0^\infty e^{tA^*}Ce^{tA}dt = \int_0^\infty [e^{tA^*}Ce^{tA}A + A^*e^{tA^*}Ce^{tA}]dt =$$

$$= \int_0^\infty [e^{tA^*}C\frac{d}{dt}e^{tA} + \frac{d}{dt}e^{tA^*}Ce^{tA}]dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}[e^{tA^*}Ce^{tA}]dt = -C.$$

В результате нами доказана резрешимость матричного уравнения Ляпунова при любой матрице C. Как известно, резрешимость системы линейных алгебраических уравнений при произвольной правой части означает, что решение единственно. Таким образом, матрица (7) дает единственное решение матричного уравнения Ляпунова.

Докажем второе утверждение теоремы. При этом мы воспользуемся известным из курса линейной алгебры определением сопряженной матрицы $Q^*$, если Q - произведение матриц $Q_1$ и $Q_2$: $Q^* = (Q_1Q_2)^* = Q_2^*Q_1^*$. Пусть $C = C^*$. Имеем:

$$H^* = \int_0^\infty (e^{tA^*}Ce^{tA})^*dt = \int_0^\infty (Ce^{tA})^*e^{tA}dt = \int_0^\infty e^{tA^*}C^*e^{tA}dt = \int_0^\infty e^{tA^*}Ce^{tA}dt = H.$$

Наконец, покажем, что, если $C = C^* > 0$, то $H = H^* > 0$. Напомним, что в случае положительной определенности матрицы H для квадратичной формы с матрицей H должно выполняться неравенство: $(Hv,v) \ge \gamma\,\|v\|^2$, где $\gamma > 0$.

Составим квадратичную форму матрицы H, используя выражение (7):

$$(Hv,v) = \int_0^\infty (e^{tA^*}Ce^{tA}v,v)dt = \int_0^\infty (Ce^{tA}v,e^{tA}v)dt = \int_0^\infty (Cz(t),z(t))dt \quad ,$$

где z(t)=e$^{tA}$v. Так как C = C$^*$> 0, то $(Cz(t),z(t)) \geq \varepsilon \left\|z(t)\right\|^2,\ \varepsilon > 0.$ Поэтому

$$(Hv,v) \geq \varepsilon \int_0^\infty \left\|e^{tA}v\right\|^2 dt \, .$$

Воспользуемся, далее, неравенством $\left\|e^{tA}v\right\| \geq e^{-|t|\|A\|}\left\|v\right\|$, которое имеет место, поскольку

$$\left\|v\right\| = \left\|e^{tA}e^{-tA}v\right\| \leq \left\|e^{-tA}\right\| \left\|e^{tA}v\right\| \leq e^{|t|\|A\|}\left\|e^{tA}v\right\| \, .$$

В результате получаем:

$$(Hv,v) \geq \varepsilon \int_0^\infty e^{-2t\|A\|}dt \left\|v\right\|^2 = \gamma \left\|v\right\|^2, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{2\|A\|} \, .$$

Следовательно, H – положительно определенная матрица. **Теорема доказана.**

В дальнейшем ограничимся случаем, когда в матричном уравнении Ляпунова (5) C – единичная матрица. Если при этом все собственные числа матрицы A принадлежат строго левой комплексной полуплоскости, то, согласно доказанной теореме, единственным решением матричного уравнения

$$HA + A^*H = -E \qquad (8)$$

будет положительно определенная матрица

$$H = \int_0^\infty e^{tA^*}e^{tA}dt \, .$$

Справедливо и обратное утверждение: если положительно определенная матрица H = H$^*$ > 0 - решение матричного уравнения (8) (в более общем случае – решение (5) с матрицей C = C$^*$ > 0), то все собственные числа матрицы A принадлежат строго левой комплексной полуплоскости. Таким образом, мы приходим к выводу: все собственные числа матрицы A имеют отрицательную вещественную часть (и, следовательно, нулевое решение векторного уравнения (1) асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда матричное уравнение Ляпунова (8) имеет решение H = H$^*$ > 0.

**Числовой критерий асимптотической устойчивости нулевого решения Годунова-Булгакова.**

Пусть все собственные числа матрицы A принадлежат строго левой комплексной полуплоскости. Введем в рассмотрение число

$$\kappa(A) = 2\|A\| \sup_{y(0)\neq 0} \frac{\int_0^\infty \|y(t)\|^2 dt}{\|y(0)\|^2}, \quad y(t) = e^{tA} y(0). \qquad (9)$$

Поскольку матрица H, являющаяся решением матричного уравнения Ляпунова (8), положительно определена, то

$$\sup_{y(0)\neq 0} \frac{(Hy(0), y(0))}{\|y(0)\|^2} = \|H\|$$

Так как с учетом интегрального представления H

$$(Hy(0), y(0)) = \int_0^\infty (e^{tA^*} e^{tA} y(0), y(0))dt = \int_0^\infty (e^{tA} y(0), e^{tA} y(0))dt = \int_0^\infty \|y(t)\|^2 dt,$$

то

$$\kappa(A) = 2\|A\|\|H\|.$$

Из (9) следует, что $\kappa(A) < \infty$, если имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения. В противном случае $\kappa(A) = \infty$.

Обычно для определения $\kappa(A)$ используется матричное уравнение Ляпунова с нормированной матрицей $A_0$:

$$HA_0 + A_0^* H = -E, \quad A_0 = \frac{A}{\|A\|}. \qquad (10)$$

При этом

$$\kappa(A_0) = 2\|H\|. \qquad (11)$$

Заметим, что с вычислительной точки зрения определение числовой характеристики устойчивости (11) является корректной задачей в отличие от детерминантного критерия Рауса-Гурвица. Можно привести примеры, когда вычислительные погрешности, связанные с приближенным представлением чисел в ЭВМ, приводят к неправильному ответу об устойчивости нулевого решения векторного уравнения (1) при использовании детерминантного критерия.

Схема вычисления решения матричного уравнения (10) основана на методе последовательных приближений вида:

$$H_k = \int_0^{2^k} e^{tA_0^*} e^{tA_0} dt, \quad k = 0,1,2,...$$

Очевидно,

$$\kappa(A_0) = 2 \lim_{k\to\infty} \|H_k\|$$

в силу условия того, что все собственные числа матрицы A и, следовательно, матрицы $A_0$, принадлежат строго левой полуплоскости, Можно показать, что для $H_k$ имеют место рекуррентные формулы:

$$H_k = H_{k-1} + e^{2^{k-1}A_0^*} H_{k-1} e^{2^{k-1}A_0}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

где

$$H_0 = \int_0^1 e^{tA_0^*} e^{tA_0} dt$$

В свою очередь матрица $H_0$ вычисляется как сумма ряда:

$$H_0 = H^{(1)} + \frac{1}{2!} H^{(2)} + \ldots + \frac{1}{m!} H^{(m)} + \ldots.. ,$$

где

$$H^{(1)} = E, \quad H^{(k)} = A_0^* H^{(k-1)} + H^{k-1} A_0, \quad k = 2,3,\ldots...$$

При этом итерационный процесс вычисления матрицы H оказывается быстро сходящимся.

Если по завершению итерационного процесса оказалось, что $\kappa(A_0) \le \kappa_*$, где $\kappa_*$- достаточно большая константа, значение которой определяется представлением чисел в ЭВМ, то гарантированно утверждается, что имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения (1). В противном случае нулевое решение “практически” неустойчиво.

## n5. Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению.

Рассмотрим автономную систему уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \tag{12}$$

с правой частью

$$f(y) = Ay + \varphi(y), \; \varphi(0) = 0.$$

Здесь A – постоянная матрица, $\varphi(y)$ - непрерывная вектор-функция, для которой выполняется оценка:

$$\|\varphi(y)\| \le q\|y\|^{1+\omega},$$

где q > 0, $\omega > 0$ – константы. Таким образом, в выражении вектор-фунции $f(y)$ выделена линейная часть $Ay$ (первое прибижение) в окрестности нулевого стационарного решения.

Если $f(y)$ - дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция, то матрица А линейной части равна $f_y(0)$. Действительно, в этом случае

$$f(y) = f(0) + f_y(0)y + \varphi(y) = f_y(0)y + \varphi(y),\ \|\varphi(y)\| \le q\|y\|^2.$$

Отсюда следует, что $\omega = 1$ , а матрицей А служит $f_y(0)$:

$$A = f_y(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(0) & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}(0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(0) \end{bmatrix}.$$

(Пусть $y = \bar{y}$ - стационарное решение автономной системы, т.е. $f(\bar{y})=0.$ Тогда $A(y - \bar{y})$ - линейная часть $f(y)$ в окрестности $y = \bar{y}$, где $A = f_y(\bar{y})$.)

Приведем без доказательств формулировки теорем Ляпунова, которые в указанных случаях позволяют судить о характере устойчивости нулевого решения векторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A\,y + \varphi(y),\ \varphi(0) = 0. \qquad (13)$$

по характеру устойчивости нулевого решения векторного уравнения (1).

**Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.** Пусть все собственные числа $\lambda_j$ матрицы А принадлежат строго левой комплексной полуплоскости: $\mathrm{Re}(\lambda_j) \le -\delta < 0,\ j = 1,2,\dots,n.$ Тогда нулевое решение векторного уравнения (13) асимптотически устойчиво при $t > 0$.

**Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.** Если у матрицы А существует хотя бы одно собственное число со строго положительной вещественной частью, то нулевое решение векторного уравнения (13) неустойчиво при $t > 0$.

Отметим, что когда все собственные числа $\lambda_j$ матрицы А имеют неположительную вещественную часть, т.е. $\mathrm{Re}(\lambda_j) \le 0,\ j = 1,2,\dots n,$ и при этом существуют собственные числа с нулевой вещественной частью, то устойчивость нулевого решения зависит от вектор-функции $\varphi(y)$. В этом случае требуются иные методы исследования устойчивости нулевого решения автономной системы (12), которые, вообще говоря, носят индивидуальный характер для конкретной задачи. Один из подходов к решению этой проблемы связан с использованием так называемых функций Ляпунова, определение которых было дано в лекции 8.

**п6. Устойчивость и неустойчивость стационарных решений автономных систем и функции Ляпунова.**

Напомним, что H(y) = H($y_1$, $y_2$,…,$y_n$) называется функцией Ляпунова для векторного уравнения (12), имеющего нулевое стационарное решение, если она обладает следующими свойствами:

Л1. $H(y)$ определена при $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2} \le R$, где она непрерывна вместе с частными производными по $y_j$;

Л2. $H(y) \ge 0$, причем $H(y) > 0$, если $0 < \|y\| \le R$, и $H(0) = 0$;

Л3. функция

$$G(y) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_j}(y) f_j(y),$$

где $f_j(y)$, $j = 1,2,...,n,$ - компоненты правой части уравнения (1), непрерывна и неотрицательна : $G(y) \ge 0$ при $\|y\| \le R$.

Л3.бис. Дополнительно к условию Л.3. имеет место строгая положительность функции $G(y)$:

$$G(y) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \|y\| \le R.$$

**Теорема Ляпунова (об устойчивости).** Если для векторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad f(0) = 0$$

имеющего нулевое решение, существует функция H(y), удовлетворяющая условиям Л1, Л2, Л3, то нулевое решение этого уравнения будет устойчивым при t > 0.

**Доказательство.** Согласно теореме о существования решения в целом (лекция 8), в которой предполагается существование функции Ляпунова для рассматриваемой автономной системы, решение $y = y(t,y^0)$ задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \; f(0) = 0, \; y = y^0 \text{ при } t = 0, \qquad (14)$$

будет определено при всех t > 0, если $\|y^0\| \le \rho_0$, где $\rho_0$ − некоторое число, существование которого утверждается теоремой. Докажем, что в этом случае при t > 0 нулевое решение векторного уравнения (13) будет устойчивым. Другими словами, согласно определению, по заданному $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех решений $y = y(t, y^0)$ задачи Коши (14) при t > 0 будет выполняться оценка: $\|y(t, y^0)\| \le \varepsilon$, если $\|y^0\| \le \delta_\varepsilon$

Зафиксируем значение $\varepsilon > 0$, по которому в силу условий Л1 и Л 2 найдется

$$H_\varepsilon = \inf_{\|y\| = \varepsilon} H(y) > 0.$$

Выберем $\delta_\varepsilon$, $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon$, таким, что

$$\sup_{\|y\| \le \varepsilon} H(y) < H_\varepsilon .$$

Очевидно, условия Л1 и Л2 гарантируют существование такого $\delta_\varepsilon$. Покажем, что решение $y = y(t, y^0)$ задачи Коши (14) при t > 0 не сможет достигнуть сферы $S_\varepsilon$ = { $\|y\| = \varepsilon$ }. Тем самым, в силу произвольности $\varepsilon$, будет доказана устойчивость нулевого решения.

Доказательство этого утверждения проведем от противного. Предположим, что при t = $t_1$ решение задачи Коши $y = y(t, y^0)$, $\|y^0\| \le \delta_\varepsilon$, достигнет сферы $S_\varepsilon$: $\|y(t_1, y^0)\| = \varepsilon.$ Тогда по определению $H_\varepsilon$ и $\rho_\varepsilon$ будут выполняться неравенства:

$$H(y(0, y^0)) = H(y^0) < H_\varepsilon \le H(y(t_1, y^0)).$$

С другой стороны, в силу условия Л3,

$$G(y(t, y^0)) \equiv -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} H(y(t, y^0) f_j(y(t, y^0) \equiv -\frac{d}{dt} H(y(t, y^0)) \ge 0.$$

Таким образом, $H(y(t, y^0)$ - невозрастающая функция при t > 0, и, следовательно,

$$. \ H(y(0, y^0)) = H(y^0) \ge H(y(t_1, y^0)).$$

Полученное противоречие свидетельствует о том, что при любых $y^0$, $\|y^0\| \le \delta_\varepsilon$, решение задачи Коши (14) будет находиться внутри сферы $S_\varepsilon$ . **Теорема доказана.**