Лекция 8

Тема 3. Автономные системы уравнений. Устойчивость по Ляпунову стационарных решений.

В этой теме мы продолжим изучение систем дифференциальных уравнений и
рассмотрим случай, когда правые части системы, задаваемые вектор-функцией $f(t,y)$, не зависит от аргумента t. Такие системы дифференциальных уравнений, называемые автономными, имеют вид:

$$\frac{dy_1}{dt}=f_1(y_1,y_2,...,y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dt}=f_2(y_1,y_2,...,y_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dy_n}{dt}=f_n(y_1,y_2,...,y_n)\ ,$$

или в векторной записи

$$\frac{dy}{dt}=f(y). \qquad (1)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что вектор-функция $f(y)$ векторного аргумента y непрерывно дифференцируема в области $\|y\|\le R$, и, таким образом, удовлетворяет в этой области условиям 1^0,2^0,3^0 локальной теоремы Пикара.

Частным случаем автономной системы является линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов А (см. лекцию 3):

$$\frac{dy}{dt}=A\,y. \qquad (2)$$

Заметим, что, поскольку при сдвиге аргумента t на постоянную величину автономная система сохраняет свой вид (см. n4, лекция 3), то при формулировке задачи Коши для уравнения (1) , мы, не теряя общности, можем задавать начальные данные при t = 0.

n1. Достаточные условия существования решения в целом для автономных систем.

Критерий существования решения автономной системы (1) для всех t>0 принадлежит Ляпунову. В формулировке критерия используется вспомогательная функция $H(y)=H(\ y_1,y_2,...,y_n)$, которую в дальнейшем мы будем называть функцией Ляпунова. Функция Ляпунова удовлетворяет следующим условиям:

Л1. $H(y)$ определена при $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2} \le R$, где она непрерывна вместе с частными производными по y_j;

Л2. $H(y) \ge 0,$ причем $H(y) > 0$, если $0 < \|y\| \le R$, и $H(0) = 0$;

Л3. функция

$$G(y) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_j}(y) f_j(y),$$

где $f_j(y)$, $j = 1,2,...,n,$ - компоненты правой части уравнения (1), непрерывна и неотрицательна : $G(y) \ge 0$ при $\|y\| \le R$.

Л3.бис. Дополнительно к условию Л.3. имеет место строгая положительность функции $G(y)$:

$$G(y) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \|y\| \le R.$$

Приведем без доказательства теорему о достаточных условиях существования решения автономных систем в целом.

Теорема существования решения в целом.

Пусть для автономной системы

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

существует функция Ляпунова $H(y)$, удовлетворяющая условиям Л1, Л2, Л3. Тогда можно выбрать ρ_0, $0< \rho_0 <R,$ такое, что задача Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \ y = y^0 \text{ при } t = 0, \ \|y^0\| \le \rho_0, \tag{3}$$

будет иметь непрерывно дифференцируемое решение $y(t)$, определенное при t > 0 и удовлетворяющее неравенству: $\|y(t)\| \le R.$

Если же выполнено еще и условие Л3.бис., то $\lim \|y(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Отметим, что при доказательстве теоремы существенно используется следующее свойство функции Ляпунова: $H(y)$ не возрастает вдоль решения $y(t)$ задачи Коши (2), т.е.

$$\frac{d}{dt}H(y(t)) \le 0 \text{ - условие Л3, и } \frac{d}{dt}H(y(t)) < 0 \text{ - условие Л3.бис.,} \tag{4}$$

что следует из выражения производной:

$$\frac{d}{dt}H(y(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_j}(y(t)) \frac{dy_j}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_j}(y(t)) f_j(y(t)) = -G(y(t)).$$

п2. Определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости стационарных решений автономных систем.

Стационарными решениями автономной системы (1) назаваются решения, которые остаются постоянными при изменении t, т.е. решения вида $y(t) \equiv \bar{y}$, где $\bar{y}$ - вектор с постоянными компонентами. Поэтому их называют также точками покоя. Стационарные решения определяются из нелинейной системы уравнений, возникающей в результате приравнивания нулю правых частей (1):

$$\begin{aligned} &f_1(y_1, y_2, ..., y_n) = 0 \\ &f_2(y_1, y_2, ..., y_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_n(y_1, y_2, ..., y_n) = 0\,, \end{aligned}$$

или

$$f(y) = 0\,. \qquad (5)$$

Не исключено, что нелинейная система (5) не имеет решений (и тогда автономная не имеет стационарных решений), равно как и не исключена возможность существования у автономной системы множественности решений.

Пусть $y = \bar{y}$ - одно из решений (5): $f(\bar{y}) = 0$. Тогда, очевидно, вектор-функция $y(t) \equiv \bar{y}$ является решением задачи Коши:

$$\frac{dy}{dt} = f(y)\,,\ y = \bar{y} \text{ при } t = 0 \qquad (6)$$

Возникает вопрос, что произойдет с решением той же автономной системы при t > 0, если “возмутить” вектор начальных данных, т.е вместо $\bar{y}$ взять вектор y^0 достаточно мало отличающийся от $\bar{y}$? Другими словами, будет ли при этом решение задачи Коши мало отличаться от стационарного решения $y(t) \equiv \bar{y}$? Сформулированная проблема является предметом исследования устойчивости стационарных решений автономных систем по Ляпунову.

Нетрудно показать, что изучение устойчивости стационарных решений автономной системы (1) по начальным данным сводится к исследованию устойчивости нулевого решения автономной системы того же типа. Действительно, автономная система

$$\frac{dv}{dt} = f(v + \bar{y}) \equiv \bar{f}(v)\,,$$

полученная из (1) заменой $y(t) = v(t) + \bar{y}$, очевидно, будет иметь решение $v(t) \equiv 0.$. Поэтому дальнейшие результаты исследования устойчивости будут относиться к нулевому решению системы:

$$\frac{dy}{dt} = f(y)\,,\quad f(0) = 0. \qquad (7)$$

Определения. 1) Нулевое решение автономной системы (7) называется **устойчивым по Ляпунову** при t > 0, если по заданному $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех решений $y(t)$ задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(y)\,,\quad f(0) = 0,\quad y = y^0 \text{ при } t = 0,\ \|y^0\| \le \delta_\varepsilon\,,$$

будет выполняться оценка: $\|y(t)\| \le \varepsilon$.

2) Нулевое решение называется **асимптотически устойчивым по Ляпунову** при t > 0, если оно устойчиво и, кроме того, $\|y(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

3) Нулевое решение называется **неустойчивым по Ляпунову** при t > 0, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ всегда найдутся T > 0 и y^0, так что решение $y(t)$ задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(y)\,,\quad f(0) = 0,\quad y = y^0 \text{ при } t = 0,\ \|y^0\| \le \delta\,,$$

при t = T будет удовлетворять неравенству: $\|y(T)\| \ge \varepsilon$.

n3. Устойчивость нулевого решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В случае, когда $f(y) = Ay,$ решение задчи Коши

$$t > 0,\quad \frac{dy}{dt} = Ay\,,\quad y = y^0 \text{ при } t = 0$$

имеет вид:

$$y(t) = e^{tA} y^0 .$$

Отсюда следует неравенство:

$$\|y(t)\| \le \|e^{tA}\| \|y^0\|$$

Таким образом, характер устойчивости нулевого решения зависит от поведения нормы матричной экспонента матрицы A при t > 0.

Пусть $\|e^{tA}\| \le M < \infty$ при t > 0. Тогда, если по заданному $\varepsilon > 0$ выбрать $\delta_\varepsilon = \varepsilon / M$, то

$$\|y(t)\| \le \|e^{tA}\| \|y^0\| \le M\delta_\phi = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\,,$$

и, следовательно, нулевое решение будет устойчивым.

Если $\|e^{tA}\| \to 0$ при $t \to \infty,$ то, очевидно, имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения.

Если норма матричной экспоненты неограничена при $t>0,$ то нулевое решение будет неустойчивым.

Приведем оценку нормы матричной экспоненты, известную как лемма Гельфанда-Шилова.

Лемма Гельфанда-Шилова. Пусть все собственные чисела матрицы A удовлетворяют условию: $\mathrm{Re}\lambda_j \le a,\ j=1,2,...,n.$ Тогда при $t>0$ имеет место следующая оценка:

$$\left\|e^{tA}\right\| \le e^{at}\,[1+\frac{2\|A\|t}{1!}+\frac{(2\|A\|t)^2}{2!}+....+\frac{(2\|A\|t)^{n-1}}{(n-1)!}]\ ,\ \ t>0. \qquad (8)$$

Доказательство. Воспользуемся представлением матричной экспоненты матрицы A в виде матричного полинома степени n-1 (см. лекцию 3):

$$e^{tA} = \psi_1(t)E + \psi_2(t)P_1(A) + \psi_3(t)P_2(A) + ...+ \psi_n(t)P_{n-1}(A). \qquad (9)$$

Здесь $P_j(A)$ – матричные полиномы степени j, j = 1,2,..., n-1:

$$P_1(A) = A - \lambda_1 E$$

$$P_2(A) = P_1(A)(A - \lambda_2 E)$$

$$P_3(A) = P_2(A)(A - \lambda_3 E)$$

…………………………..

$$P_{n-1}(A) = P_{n-2}(A)(A-\lambda_{n-1}E).$$

Функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$,…, $\psi_n(t)$ определяются по рекуррентным формулам:

$$\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}\ ,\ \ \psi_k(t) = e^{\lambda_k t}\int\limits_0^t e^{-\lambda_k s}\psi_{k-1}(s)ds\ ,\ k=2,3....,n. \qquad (10)$$

Согласно (8) имеем :

$$\left\|e^{tA}\right\| \le \left\|\psi_1(t)\right\| + \left\|\psi_2(t)\right\|\left\|P_1(A)\right\| + \left\|\psi_3(t)\right\|\left\|P_2(A)\right\| + \ldots + \left\|\psi_n(t)\right\|\left\|P_{n-1}(A)\right\|. \qquad (11)$$

Вначале покажем, что

$$\left\|P_j(A)\right\| \le (2\|A\|)^j,\ j=1,2,...,n-1.$$

При этом мы воспользуемся оценкой модуля собственного числа. Так как

$$\left\|Av^{[k]}\right\| = \left\|\lambda_j v^{[k]}\right\| = |\lambda_л|\left\|v_k\right\|,$$

где $v^{[k]}$ - собственный вектор, то с учетом определения нормы матрицы получаем:

$$|\lambda_k| \le \frac{\|Av^{[k]}\|}{\|v^{[k]}\|} \le \|A\|, \quad k = 12,...n .$$

В результате выполняются неравенства:

$$\|P_1(A)\| = \|A - \lambda_1 E\| \le \|A\| + |\lambda_1| \le 2\|A\|,$$

$$\|P_2(A)\| = \|P_1(A)(A - \lambda_2 E)\| \le \|P_1(A)\| \, \|A - \lambda_2 E\| \le (2\|A\|)^2$$

и т.д.

$$\|P_j(A)\| = \|P_{j-1}(A)(A - \lambda_j E)\| \le \|P_{j-1}(A)\| \, \|A - \lambda_j E\| \le (2\|A\|)^j \,.$$

Переходим к оценкам модулей функций ψ_1(t), ψ_2(t), ..., ψ_n(t), Очевидно,

$$|\psi_1(t)| = |e^{\lambda t_1}| \le e^{at}.$$

Для модуля функции ψ_2(t), согласно (10), имеем:

$$|\psi_2(t)| \le \int_0^t |e^{\lambda_1(t-s)}| |\psi_1(s)| ds = \int_0^t e^{R_e\lambda_2(t-s)} e^{R_e\lambda_1 s} ds \le \int e^{a(t-s)} e^{as} ds = \frac{t}{1!} e^{at}.$$

Предположим, следуя индукции, что

$$|\psi_{k-1}(t)| \le \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} e^{at}.$$

Тогда

$$|\psi_k(t)| \le \int_0^t |e^{\lambda_л(t-s)}| |\psi_{k-1}(s)| ds =$$

$$= \int_0^t e^{R_e\lambda_л(t-s)} \frac{s^{k-2}}{(k-2)!} e^{R_e\lambda_{л-1}s} ds \le \int_0^t e^{a(t-s)} \frac{s^{k-2}}{(k-2)!} e^{as} ds = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{at}.$$

Итак, нами показано, что

$$|\psi_k(t)| \le \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{at}.$$

После подстановки в (11) полученных выше оценок следует, что

$$\|e^{tA}\| \le e^{at} + \frac{t}{1!} e^{at} (2\|A\|) + \frac{t^2}{2!} e^{at} (2\|A\|)^2 + ... + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at} (2\|A\|)^{n-1} =$$

$$= e^{at}\left[1 + \frac{2\|A\|t}{1!} + \frac{(2\|A\|t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(2\|A\|t)^{n-1}}{(n-1)!}\right].$$

Тем самым установлено, что неравенство (8) действительно имеет место. **Лемма доказана.**

Следствие из леммы Гельфанда-Шилова. Пусть все собственные числа матрицы А принадлежат строго левой комплексной полуплоскости: $\operatorname{Re}\lambda_j \le -\delta < 0,\ j = 1,2,\ldots,n.$ В этом случае неравенство (8) принимает вид:

$$t \ge 0,\ \|e^{tA}\| \le e^{-\delta t}\left[1 + \frac{2\|A\|t}{1!} + \frac{(2\|A\|t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(2\|A\|t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]. \qquad (12)$$

Приведем более грубую оценку матричной экпоненты, чем (12), которую в дальнейшем мы и будем использовать. Так как $\delta \le |\lambda_k| \le \|A\|$, то $\|A\|/\delta \ge 1.$ Поэтому

$$\|e^{tA}\| \le e^{-\delta t}\left[1 + \frac{\|A\|}{\delta}\frac{2\|\delta\|t}{1!} + \left(\frac{\|A\|}{\delta}\right)^2\frac{(2\|\delta\|t)^2}{2!} + \ldots + \left(\frac{\|A\|}{\delta}\right)^{n-1}\frac{(2\|\delta\|t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] \le$$

$$\le e^{-\delta t}\left(\frac{\|A\|}{\delta}\right)^{n-1}\left[1 + \frac{2\|\delta\|t}{1!} + \frac{(2\|\delta\|t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(2\|\delta\|t)^{n-1}}{(n-1)!}\right].$$

Заметим, что функция

$$r(u) = e^{-\frac{u}{2}}\left(1 + \frac{2u}{1!} + \frac{(2u)^2}{2!} + \ldots + \frac{(2u)^{n-1}}{(n-1)!}\right],\ u = \delta\, t,$$

при $u > 0$ ограничена константой, зависящей только от n: $r(u) \le C(n)$. Поэтому оценку для матричной экспоненты можно представить в виде:

$$\|e^{tA}\| \le C(n)\left(\frac{\|A\|}{\delta}\right)^{n-1} e^{-\frac{\delta t}{2}}, \text{ или } \|e^{tA}\| \le c\, e^{-\frac{\delta t}{2}}, \qquad (13)$$

где c – постоянная: $.c = c(n, \|A\|, \delta)$.

Теорема 1. Пусть все собственные числа числа матрицы А имеют отрицательную вещественную часть: $\operatorname{Re}\lambda_j \le -\delta < 0,\ j = 1,2,\ldots,n.$ Тогда нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво при t > 0.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_j \le -\delta < 0,\ j = 1,2,\ldots,n,$ то в силу оценки (13) $\|e^{tA}\| \le c\, e^{-\frac{\delta t}{2}}$ и, следовательно, $\|e^{tA}\| \to 0$, при $t \to \infty$, что свидетельствует об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2) при t > 0. **Теорема доказана.**

Теорема 2. Если матрица А имеет хотя бы одно чисто мнимое собственное число, то нулевое решение системы (2) не может быть асимптотически устойчивым при t > 0.

Доказательство. Пусть λ_j - чисто мнимое собственное число: $\lambda_j = i\mu_j$, которому соответствует собственный вектор $v^{[j]} : Av^{[j]} = \lambda_j v^{[j]}$. Предположим, что все решения $y(t) = e^{tA}y(0)$ системы (2) стремятся к нулю при $t \to \infty$, если норма $\|y(0)\|$ достаточно мала. Тогда, в частности, норма вектор-функции $y^{[j]}(t) = \varepsilon\, e^{\lambda_j t} v^{[j]}$, $\varepsilon > 0$, которая, как легко проверить, является решением системы (2), также должна стремится к нулю при $t \to \infty$ по крайней мере для достаточно малых ε. Однако, поскольку $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$, $\|y^{[j]}(t)\| = \varepsilon\|v^{[j]}\|$ = const. Полученное противоречие доказывает, что нулевое решение не является асимптотически устойчивым. **Теорема доказана.**

Теорема 3. Если среди собственных чисел матрицы A нет собственных чисел с положительной вещественной частью, $\mathrm{Re}\lambda_j \le 0, \quad j = 1,2,...,n.$ а чисто мнимым собственным числам соответствуют только одномерные жордановы клетки, то нулевое решение системы (2) устойчиво по Ляпунову при t > 0.

Доказательство. Обозначим через m число чисто мнимых собственных чисел матрицы A, а через k – число собственных чисел с отрицательной вещественной частью, m + k = n. Пусть T – матрица перехода к жордановой форме J матрицы A. По условию теоремы матрица A имеет представление:

$$A = TJT^{-1} = T\begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix}T^{-1},$$

где J_- - (k x k)-матрица, состоящая из жордановых клеток, соответствующих собственным числам с отрицательной вещественной частью: $\mathrm{Re}\lambda_j \le -\delta < 0,\ j=1,2,...,k$, а J_0 – диагональная (m x m)-матрица с чисто мнимыми собственными числами:

$$J_0 = \begin{bmatrix} i\mu_1 & & & \\ & i\mu_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & i\mu_m \end{bmatrix}.$$

При этом матричная экспонента e^{tA} имеет вид:

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = T\begin{bmatrix} e^{tJ_0} & 0 \\ 0 & e^{tJ_-} \end{bmatrix}T^{-1},$$

где

$$e^{tJ_0} = \begin{bmatrix} e^{it\mu_1} & & & \\ & e^{it\mu_2} & & \\ & & \ldots & \\ & & & e^{ti\mu_m} \end{bmatrix}.$$

Согласно следствию из леммы Гельфанда-Шилова в виде неравенства (13)

$$\|e^{tJ_-}\| \le c\, e^{-\frac{\delta t}{2}} \text{ при } t > 0.$$

Кроме того, $\left\|e^{tJ_0}\right\| = 1.$ Отсюда следует, что $\left\|e^{tA}\right\| \le M < \infty$ при t > 0 и, тем самым доказано, что нулевое решение системы (1) устойчиво. **Теорема доказана.**

Теорема 4. Если матрица А имеет хотя бы одно собственное число с положительной вещественной частью, то нулевое решение системы (2) неустойчиво при t > 0.

Доказательство. Пусть $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ - собственное число матрицы А с положительной вещественной частью, которому соответствует собственный вектор $v^{[j]}$, $Av^{[j]} = \lambda_j v^{[j]}$. Тогда вектор-функция $y^{[j]}(t) = e^{\lambda_j t} v^{[j]}$ является решением системы (2), причем $\left\|y^{[j]}(t)\right\| = e^{\alpha t}\left\|v^{[j]}\right\|$. Так как $\alpha > 0$, то $\left\|y^{[j]}(t)\right\| \to \infty$ при $t \to \infty$. Следовательно, нулевое решение системы (2) неустойчиво при t > 0. **Теорема доказана.**

Теорема 5. Если матрица А имеет хотя бы одно чисто мнимое собственное число, которому соответствует неодномерная жорданова клетка, то нулевое решение системы (2) неустойчиво по Ляпунову при t > 0.

Доказательство. Пусть λ_j - чисто мнимое собственное число: $\lambda_j = i\mu_j$, которому соответствует неодномерная жорданова клетка. Тогда существуют ненулевые собственный и присоединенный векторы $v^{[j]}$ и $w^{[j]}$: $Av^{[j]} = \lambda_j v^{[j]}$, $A^{[j]}w^{[j]} = \lambda_j w^{[j]} + v^{[j]}$. Следовательно, вектор-функция $y^{[j]}(t) = e^{\lambda_j t}(tv^{[j]} + w^{[j]})$ является решением системы (2). Отсюда получаем:

$$\left\|y^{[j]}(t)\right\| = \left\|tv^{[j]} + w^{[j]}\right\| \ \ge \ \left|t\left\|v^{[j]}\right\| - \left\|w^{[j]}\right\|\right|,$$

т.е. $\left\|y^{[j]}(t)\right\| \to \infty$ при $t \to \infty$. Таким образом, нулевое решение системы (2) неустойчиво при t > 0. **Теорема доказана.**

Вывод. Из терем 1- 5 вытекают следующие утверждения.

1) Нулевое решение системы (2) устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы А имеют неположительные вещественные части, причем чисто мнимым собственным числам соответствуют только одномерные жордановы клетки.

2) Нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы А имеют строго отрицательные
вещественные части.

3) В остальных сдучаях нулевое решение системы (2) неустойчиво по Ляпунову.