

Лекция 6

п8. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений.

Неоднородная система дифференциальных уравнений первого порядка отличается от однородной тем, что в уравнения входят компоненты заданной на отрезке $[t_1, t_2]$ вектор-функции $f(t)$:

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_1, t_2],$$

так что векторная запись неоднородной системы имеет вид:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t). \quad (1)$$

Рассмотрим задачу Коши для (1):

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \quad y = y^0 \text{ при } t = t_0, \quad t_0 \in [t_1, t_2]. \quad (2)$$

Теорема. Пусть $A(t)$ – $(n \times n)$ -матричная функция, $A(t) \in C([t_1, t_2])$. Тогда для любых вектор-функции $f(t) \in C([t_1, t_2])$ и вектора начальных данных y^0 решение задачи Коши (2) имеет единственное решение $y(t) \in C^1([t_1, t_2])$, определяемое формулой Коши:

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)y^0 + \int_{t_0}^t Y(t)Y^{-1}(s)f(s)ds, \quad (3)$$

где

$$Y(t) - \text{Ф.М.Р.} \quad \frac{dy}{dt} = A(t)y.$$

Доказательство. Для доказательства существования решения (2) в виде формулы Коши воспользуемся методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Следуя методу, будем искать решение (2) в виде:

$$y(t) = Y(t)C(t), \quad (4)$$

где $C(t)$ – вектор – функция, подлежащая определению. (Заметим, что если C – постоянный вектор, то $y(t) = Y(t)C$ – общее решение однородного векторного уравнения. Отсюда название метода – метод вариации произвольных постоянных.) Потребуем тождественного выполнения условий, задаваемых задачей Коши (2) при подстановке в (2) вектор-функции (4). Имеем:

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{dY}{dt}(t)C(t) + Y(t)\frac{dC}{dt}(t) = A(t)Y(t)C(t) + Y(t)\frac{dC}{dt}(t).$$

С другой стороны,

$$A(t)y(t) + f(t) = A(t)Y(t)C(t) + f(t).$$

Оба выражения тождественны равны, если

$$Y(t)\frac{dC}{dt}(t) \equiv f(t).$$

Кроме того, при $t = t_0$ должно выполняться условие: $y(t_0) = y^0 = Y(t_0)C(t_0)$. Итак, для определения вектор-функции $C(t)$ мы имеем задачу Коши:

$$\frac{dC}{dt} = Y^{-1}(t)f(t), \quad C = Y^{-1}(t_0)y^0 \text{ при } t = t_0,$$

решение которой имеет вид:

$$C(t) = Y^{-1}(t_0)y^0 + \int Y^{-1}(s)f(s)ds.$$

Следовательно, принимая во внимание (4), вектор-функция

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)y^0 + \int_{t_0}^t Y(t)Y^{-1}(s)f(s)ds$$

является решением задачи Коши (2).

Покажем, что решение задачи Коши (2) единственно. Предположим, что существует два решения задачи Коши - вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$,

$$\frac{du}{dt}(t) \equiv A(t)u(t) + f(t), \quad u(t_0) = y^0,$$

$$\frac{dv}{dt}(t) \equiv A(t)v(t) + f(t), \quad v(t_0) = y^0.$$

Отсюда следует, вектор-функция $y(t) = u(t) - v(t)$ является решением однородного уравнения с нулевыми начальными данными:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y=0 \text{ при } t = t_0,$$

т.е. $y(t) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает единственность решения задачи Коши (2).

Заметим, что формула Коши (3) определяет $y(t)$ как непрерывную функцию, производная которой

$$\frac{dy}{dt}(t) = A(t)y(t) + f(t)$$

также непрерывна, т.е. $y(t) \in C^1([t_1, t_2])$. **Теорема доказана.**

В случае задачи Коши (2) для неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей A коэффициентов,

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \quad y = y^0 \text{ при } t = t_0, \quad t_0 \in [t_1, t_2]. \quad (5)$$

решение можно представить в виде формулы Коши (3), где Ф.М.Р. $Y(t)$ – матричная экспонента матрицы A . После подстановки в (3) $Y(t) = e^{tA}$ получаем:

$$y(t) = e^{tA}(e^{t_0A})^{-1}y^0 + \int_{t_0}^t e^{tA}(e^{sA})^{-1}f(s)ds.$$

С использованием свойства матричной экспоненты, (см. свойства 3, 4, лекция 3) формула Коши принимает вид:

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y^0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}f(s)ds. \quad (6)$$

п9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высокого порядка.

Рассмотрим задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения высокого порядка

$$P_n(t, \frac{d}{dt})x \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + p_n(t)x = F(t) \quad (7)$$

$$x = y_1^0, \quad \frac{dx}{dt} = y_2^0, \dots, \quad \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = y_n^0, \quad \text{при } t = t_0,$$

Здесь $p_j(t) \in C([t_1, t_2])$, $j = 1, 2, \dots, n$, и $F(t) \in C([t_1, t_2])$ – заданные функции.

Теорема. Пусть $p_j(t) \in C([t_1, t_2])$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда для любых вектор-функции $f(t) \in C([t_1, t_2])$ и вектора начальных данных $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ задача Коши (7) имеет единственное решение $x(t) \in C^n([t_1, t_2])$.

Доказательство. В связи с (7) рассмотрим задачу Коши (2) с матричной функцией $\bar{A}(t)$ и вектор функцией $\bar{f}(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = \bar{A}(t)y + \bar{f}(t), \quad y = y^0 \text{ при } t = t_0, \quad t_0 \in [t_1, t_2], \quad (8)$$

где

$$\bar{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_n(t) & -p_{n-1}(t) & -p_{n-2}(t) & \dots & -p_1(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ F(t) \end{bmatrix}, \quad y^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \dots \\ y_{n-1}^0 \\ y_n^0 \end{bmatrix}.$$

Так как $p_j(t) \in C([t_1, t_2])$, $j = 1, 2, \dots, n$, и $F(t) \in C([t_1, t_2])$, то в задаче Коши (8) $\bar{A}(t) \in C([t_1, t_2])$ и $\bar{f}(t) \in C([t_1, t_2])$ и, следовательно, существует единственное решение $y(t) \in C^1([t_1, t_2])$.

Тем же способом, как и в случае задачи Коши для линейного однородного дифференциального уравнения высокого порядка (см. п6, лекция 5) показывается, что между задачами (7) и (8) существует взаимно однозначное соответствие: если $y(t)$ – решение (8), то $x(t) = y_1(t)$, где $y_1(t)$ – первая компонента вектор-функции $y(t)$, является решением (7). И наоборот. Если $x(t)$ – решение задачи Коши (7), то вектор-функция $y(t)$ с компонентами

$$y_1(t) = x(t), \quad y_2(t) = \frac{dx}{dt}(t), \quad \dots, \quad y_n(t) = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t), \quad (9)$$

будет решением задачи Коши (8). Поскольку существование единственного решения задачи Коши (8) доказано, (при этом $y(t) \in C([t_1, t_2])$), то и задача Коши (7) имеет единственное решение $x(t) \in C^n([t_1, t_2])$. Принадлежность $x(t)$ классу $C^n([t_1, t_2])$ следует из того, что согласно (7) и (9)

$$\begin{aligned} \frac{d^n x}{dt^n}(t) &= F(t) - [p_1(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t) + \dots + p_{n-1}(t) \frac{dx}{dt}(t) + p_n(t)x(t)] = \\ &= F(t) - [p_1(t)y_n(t) + \dots + p_{n-1}(t)y_2(t) + p_n(t)y_1(t)], \end{aligned}$$

где в правой части равенства $F(t)$, $p_j(t)$, и $y_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, – непрерывные функции. Таким образом, n -я производная $x(t)$ непрерывна. **Теорема доказана.**

Остановимся на применении метода вариаций произвольных постоянных к построению решения задачи Коши (8). Как и в задаче Коши (2) решение (8) ищется в виде (4):

$$y(t) = Y(t)C(t),$$

где вектор-функция $y(t)$ имеет компоненты (9), а

$$Y(t) - \text{Ф.М.Р. } P_n(t, \frac{d}{dt})x = 0.$$

Напомним, что по определению

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \frac{dx_1}{dt}(t) & \frac{dx_2}{dt}(t) & \dots & \frac{dx_n}{dt}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}(t) & \frac{d^{n-1}x_2}{dt^{n-1}}(t) & \dots & \frac{d^{n-1}x_n}{dt^{n-1}}(t) \end{bmatrix},$$

где

$$\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} - \text{Ф.С.Р. } P_n(t, \frac{d}{dt})x = 0.$$

При этом первая компонента $y(t)$ равна $x(t)$ и, следовательно, имеет вид линейной комбинаций функций образующих Ф.С.Р.:

$$x(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + \dots + C_n(t)x_n(t). \quad (10)$$

Компоненты $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ вектор-функции $C(t)$ находятся из решения задачи Коши, имеющей вид:

$$Y(t) \frac{dC}{dt} = \bar{f}(t), \quad Y(t_0)C(t_0) = y^0,$$

или

$$\frac{dC}{dt} = Y^{-1}(t)\bar{f}(t), \quad C(t_0) = Y^{-1}(t_0)y^0. \quad (11)$$

После определения $C(t)$ из (11) решение задачи Коши (7) записывается в виде (10). Рассмотрим пример:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dx}{dt} = F(t), \quad x = y_1^0, \quad \frac{dx}{dt} = y_2^0 \quad \text{при } t = 1, \quad t \neq 0. \quad (12)$$

Вначале определим Ф.С.Р. однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dx}{dt} = 0.$$

состоящую из функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Очевидно, что функция $x_1(t) \equiv 1$ является решением однородного уравнения. Для определения $x_2(t)$ воспользуемся формулой Лиувилля-Остроградского, которая в данном случае имеет вид:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_2(t) \\ 0 & \frac{dx_2}{dt}(t) \end{bmatrix} = \frac{dx_2}{dt}(t) = \text{const} e^{-\int_1^t \frac{ds}{s}} = \frac{\text{const}}{t}.$$

Отсюда следует, что с точностью до множителя $x_2(t) = \ln(t)$. Таким образом,

$$\{1, \ln(t)\} - \Phi.C.P. \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dx}{dt} = 0,$$

а

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & \ln(t) \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} - \Phi.M.P. \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dx}{dt} = 0,$$

Решение (12) имеет вид:

$$x(t) = C_1(t) + C_2(t) \ln(t), \quad (13)$$

где функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяются из решения задачи Коши для векторного уравнения:

$$\begin{bmatrix} 1 & \ln(t) \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dC_1}{dt} \\ \frac{dC_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} \text{ при } t = 1. \quad (14)$$

Здесь учтено, что $Y(1) = E$. Разрешая (14) относительно dC_1/dt и dC_2/dt , получаем две задачи Коши:

$$\frac{dC_1}{dt} = -t \ln(t) F(t), \quad \frac{dC_2}{dt} = t F(t),$$

$$C_1 = y_1^0, \quad C_2 = y_2^0 \quad \text{при } t = 1,$$

откуда следуют выражения $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$C_1(t) = - \int_1^t s \ln(s) F(s) ds + y_1^0, \quad C_2(t) = \int_1^t s F(s) ds + y_2^0.$$

Наконец, подстановка найденных $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в (13) позволяет представить решение задачи Коши (12) в виде:

$$x(t) = y_1^0 + y_2^0 \ln(t) + \int_1^t s \ln\left(\frac{t}{s}\right) F(s) ds.$$

Тема 2. Нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

В этой теме мы переходим к описанию важных свойств систем дифференциальных уравнений достаточно общего вида:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}\tag{15}$$

где $f_j(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ - заданные функции $(n+1)$ -го аргумента, определенные в некоторой области B $(n+1)$ -мерного пространства. Обозначим через $f(t, y)$ вектор-функцию скалярного аргумента t и векторного аргумента y с компонентами $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$f(t, y) = \begin{bmatrix} f_1(t, y) \\ f_2(t, y) \\ \dots \\ f_n(t, y) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{bmatrix}.$$

При этом система (15) запишется в виде векторного уравнения:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).\tag{16}$$

п1. Некоторые сведения о вектор-функциях векторного аргумента.

1. Пусть $g \in E^n$ - вектор-функция векторного аргумента $u \in E^m$: $g = g(u)$. Область $U \subset E^m$ называется выпуклой, если для любой пары векторов $u^1 \in U$ и $u^2 \in U$, $u^1 \neq u^2$, выполняется условие:

$$u(\lambda) = (1 - \lambda)u^1 + \lambda u^2 \in B, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.\tag{17}$$

Другими словами, область U называется выпуклой, если все точки отрезка прямой, проходящей через две произвольные точки области U , также принадлежат этой области. В дальнейшем мы будем предполагать, что области определения рассматриваемых вектор-функций векторного аргумента являются выпуклыми.

2. Значок производной вектор-функции $g = g(u)$ по векторному аргументу u является обозначением $(n \times m)$ -матричной функцию производных компонент вектор-функции $g(u)$ по компонентам аргумента u :

$$g_u(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial g_1}{\partial u_2}(u) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m}(u) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial u_m}(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial g_n}{\partial u_2}(u) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial u_m}(u) \end{bmatrix}, \text{ или } \frac{dg}{du}(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial g_1}{\partial u_2}(u) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m}(u) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial u_m}(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial g_n}{\partial u_2}(u) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial u_m}(u) \end{bmatrix},$$

3. Пусть в свою очередь u – вектор-функция векторного аргумента $\lambda \in E^p$: $u = u(\lambda)$.

Тогда, как легко проверить, выполняется правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dg}{d\lambda} = \frac{dg}{du}(u(\lambda)) \frac{du}{d\lambda},$$

Действительно, приравнявая соответствующие элементы матриц слева и справа, получаем:

$$\frac{\partial g_i}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial g_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial g_i}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \lambda_k} + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial \lambda_k}.$$

4. Рассмотрим случай, когда λ – скалярный аргумент, а зависимость u от λ имеет вид (17). При этом

$$\frac{dg}{d\lambda} = \frac{dg}{du}(u(\lambda))(u^2 - u^1), \quad u(\lambda) = (1 - \lambda)u^1 + \lambda u^2.$$

Отсюда следует, что

$$g(u^2) - g(u^1) = \int_0^1 g_u(u(\lambda)) d\lambda (u^2 - u^1). \quad (18)$$

п2. Задача Коши. Отрезок Пеано.

В дальнейшем мы будем считать что вектор-функция $f(t, y)$ – правая часть уравнения (16) – определена и непрерывна в области B , являющейся окрестностью некоторой точки (t_0, y^0) в $(n+1)$ -мерном пространстве:

$$B = \left\{ \begin{array}{l} |t - t_0| \leq T, \\ \|y - y_0\| = \sqrt{(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 \dots (y_n - y_n^0)^2} \leq R. \end{array} \right\} \quad (19)$$

Из непрерывности следует ограниченность $f(t, y)$:

$$\|f(t, y)\| = \sqrt{f_1^2(t, y) + f_2^2(t, y) + \dots + f_n^2(t, y)} \leq F. \quad (20)$$

Сформулируем задачу Коши для уравнения (16): требуется найти вектор-функцию

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix},$$

при подстановке которой в (16) последнее обращается в тождество:

$$\frac{dy}{dt}(t) \equiv f(t, y(t)) \quad (21)$$

для всех t на некотором отрезке по t . Кроме того, компоненты $y(t)$ должны принимать заданные значения при $t = t_0$:

$$y(t_0) = \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \dots \\ y_n(t_0) \end{bmatrix} = y^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{bmatrix}.$$

В этом случае вектор-функцию $y(t)$ мы будем называть решением задачи Коши:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y = y^0 \text{ при } t = t_0. \quad (22)$$

Очевидно, рассмотренные ранее задачи Коши для линейных систем дифференциальных уравнений являются частным случаем (22). Однако, если решение (2) существовало на том же отрезке по t , на котором определены $A(t)$ и $f(t)$, то теперь, вообще говоря, мы не можем утверждать, что решение задачи Коши (22) существует на отрезке $|t - t_0| \leq T$. Приведем некоторые рассуждения на эту тему, которые послужат пояснением понятия отрезка Пеано. В дальнейшем будет показано, что решение (22) существует именно на отрезке Пеано.

Пусть $y(t)$ – решение задачи Коши (22). Так как вектор-функция $y(t)$ не должна выходить за область B (19) (в противном случае тождество (21) теряет смысл), то отрезок по t , на котором определено решение, должен принадлежать отрезку $|t - t_0| \leq T$, и, кроме того, должно выполняться неравенство $\|y(t) - y^0\| \leq R$. Проинтегрируем теперь обе части тождества (21) от t_0 до t :

$$y(t) - y^0 = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Поскольку в области B вектор-функция $f(t, y)$ ограничена, то с учетом (20) имеем:

$$\|y(t) - y^0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, y(s))\| ds \right| \leq F|t - t_0| \leq R.$$

Естественно, что из двух отрезков по t

$$|t - t_0| \leq T \quad \text{и} \quad |t - t_0| \leq \frac{R}{F}$$

следует выбрать наименьший.

Определение. Отрезок по t

$$|t - t_0| \leq T_0 = \min\left(T, \frac{R}{F}\right) \quad (23)$$

называется отрезком Пеано.

Нам предстоит доказать теорему Пикара, которая при некотором дополнительном ограничении на $f(t, y)$ гарантирует существование единственного решения задачи Коши (22) на отрезке Пеано (23).