Фадеев С.И.

ЛЕКЦИИ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Предлагаемый курс лекций содержит три раздела из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В первом разделе рассматриваются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, включая теорему существования и единственности решения задачи Коши для однородных систем, теорему о пространстве решений однородной системы и метод Лагранжа для построения решения неоднородных систем. Второй раздел содержит сведенья о нелинейных системах дифференциальных уравнений: локальная теорема Пикара, теорема о достаточных условиях существования решения в целом задачи Коши для автономных систем. Третий раздел посвящен теоремам Ляпунова об устойчивости стационарных решений автономных систем. Курс, как введение, предназначен для студентов, занимающихся численным исследованием математических моделей, представленных автономными системами уравнений.

Список рекомендуемой литературы.

1. С.К.Годунов. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск. Издательство НГУ, 1994г. 264с.
2. Р.Б. Беллман. Введение в теорию матриц. Москва. Наука, 1976, 352с.
3. Г.Стренг. Линейная алгебра и ее приложения. Москва. Мир. 1980. 454с.
4. Г.В. Демиденко, Золотарева Е.В., Фадеев С.И. Линейные однородные системы и уравнения высокого порядка. Методическая разработка. Новосибирск. НГУ. 1986. 20с.

Лекция 1.

Тема 1. Однородные линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

В этой теме мы рассмотрим системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt} = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + ... + a_{1n}(t)y_n \\
&\frac{dy_2}{dt} = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + ... + a_{2n}(t)y_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{dy_n}{dt} = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + ... + a_{nn}(t)y_n \,.
\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $a_{ij}(t),\ i,j = 1,2,...,n,$ − вещественные функции скалярного аргумента t, которые мы будем считать непрерывными на отрезке $[t_1,t_2]$. Требуется найти функции $y_1(t)$, $y_2(t),\ldots,y_n(t)$ такие, что при подстановке их в (1) уравнения системы будут представлять из себя тождества при всех $t \in [t_1,t_2]$:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt}(t) \equiv a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + ... + a_{1n}(t)y_n(t) \\
&\frac{dy_2}{dt}(t) \equiv a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + ... + a_{2n}(t)y_n(t) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{dy_n}{dt}(t) \equiv a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + ... + a_{nn}(t)y_n(t)\,.
\end{aligned} \qquad (2)$$

В этом случае функции $y_1(t),\ y_2(t),\ldots,y_n(t)$ мы будем называть решением системы (1).

В дальнейшем будет показано, что если от функций, которые мы определили как решение системы (1), потребовать еще выполнения условий (начальные данные)

$$y_1(t) = y_1^0,\ y_2(t) = y_2^0,\ \ldots,\ y_n(t) = y_n^0 \text{ при } t = t_0,\ t_0 \in [t_1,t_2], \qquad (3)$$

где $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ - заданные числа, то функции $y_1(t),\ y_2(t),\ldots,y_n(t)$ находятся однозначно и будут непрерывно дифференцируемыми.

Задача определения функций $y_1(t),\ y_2(t),\ldots,y_n(t)$, удовлетворяющих условиям (2),(3), называется задачей с начальными данными, или задачей Коши. Из этого определения следует, что задача Коши формулируется следующим образом:

$$t \in [t_1, t_2], \quad t_0 \in [t_1, t_2],$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \ldots + a_{1n}(t)y_n \\
\frac{dy_2}{dt} &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \ldots + a_{2n}(t)y_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \ldots + a_{nn}(t)y_n \, .
\end{aligned} \tag{4}$$

$$y_1 = y_1^0, \; y_2 = y_2^0, \ldots, y_n = y_n^0 \text{ при } \; t = t_0.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1.$$

При подстановке в дифференциальное уравнение, напрмер, функции $y_1(t) = \sin(t)$ получим уравнение: $\cos(t) = \sin(t)$, определяющее значения t, при которых пересекаются графики функций sin(t) и cos(t). Поскольку последнее равенство выполняется не тождественно, то функция $y_1(t) = \sin(t)$ не является решением дифференциального уравнения. Как легко проверить, решение имеет вид: $y_1(t) = e^t c$, где с – произвольная постояннаяю. А именно, после подстановки в дифференциальное уравнение мы получим тождество: $e^t c \equiv e^t c$. Потребуем теперь от решения выполнения условия:

$$y_1 = y_1^0 \text{ при } t = t_0, \; |t_0| < \infty .$$

При этом произвольная постоянная определяется, а решение принимает вид:

$$y_1(t) = e^{t-t_0} y_1^0 .$$

Очевидно, что решение задачи Коши (4) в виде элементарных функций возможно лишь в исключительных случаях (например, когда $a_{ij}, \; i, j = 1, 2, ..., n,$ − постоянные коэффициенты). Основное внимание мы уделим изучению свойств решения однородных систем и доказательству существования и единственности решения задачи Коши.

n1. Векторное представление задачи Коши.

Пусть в n – мерном евклидовом пространстве компоненты вектора y являются функциями скалярного аргумента t. В этом случае мы будем называть y вектор – функцией y(t), которую будем записывать в виде вектор-столбца, т.е. в виде матрицы размеров (n x 1):

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots\dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}.$$

Точно также вводится в рассмотрение (n x n) - матричная функция A(t) с элементами $a_{ij}(t)$:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

По правилу умножения матриц результатом умножения A(t) на y(t) будет вектор -столбец z(t):

$$z(t) = A(t)y(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dots \\ z_n(t) \end{bmatrix},$$

где

$$z_i(t) = a_{i1}(t)y_1(t) + a_{i2}(t)y_2(t) + \dots + a_{in}(t)y_n(t), \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Заметим, что i-ая компонента вектор-столбца z(t) является скалярным произведением i-ой вектор-строки матрицы A(t) и вектор-столбца y(t).

Из определения ветор-функции y(t) следует понятие производной вектор-функции. Пусть каждая из компонент y(t) имеет непрерывную производную. Имеем:

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} y_1(t+\Delta t) - y(t) \\ y_2(t+\Delta t) - y(t) \\ \dots \\ y_n(t+\Delta t) - y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [y_1(t+\Delta t) - y(t)]/\Delta t \\ [y_2(t+\Delta t) - y(t)]/\Delta t \\ \dots \\ [y_n(t+\Delta t) - y(t)]/\Delta t \end{bmatrix}.$$

Устремив приращение аргумента Δt нулю, получим, согласно определению производной:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \begin{bmatrix} dy_1/dt(t) \\ dy_2/dt(t) \\ \dots \\ dy_n/dt(t) \end{bmatrix},$$

т.е. производная вектор-функции y(t) есть вектор-функция, компонентами которой служат производные компонент вектор-функции y(t):

$$\frac{dy}{dt}(t) = \begin{bmatrix} dy_1 / dt(t) \\ dy_2 / dt(t) \\ \dots \\ dy_n / dt(t) \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем, указывая на область определения и свойства вектор-функции, мы будем подразумевать, что в этой области этими свойствами обладает каждая из компонент вектор-функции.

Аналогично показывается, что производная матричной функции Y(t)

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

есть матричная функция, элементами которой являются производные элементов матричной функции Y(t). С использованием верхнего штриха “ / ” для обозначения производной имеем:

$$\frac{dY}{dt}(t) = \begin{bmatrix} y_{11}^{/}(t) & y_{12}^{/}(t) & \dots & y_{1n}^{/}(t) \\ y_{21}^{/}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{2n}^{/}(t) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ y_{n1}^{/}(t) & y_{n2}^{/}(t) & \dots & y_{nn}^{/}(t) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь интегрирование вектор-функций. Пусть $v(t)$ – вуктор-функция, компонентами которой являются интегралы от компонент вектор-функции y (t):

$$v(t) = \begin{bmatrix} \int_a^t y_1(s)ds \\ \int_a^t y_2(s)ds \\ \dots\dots\dots\dots \\ \int_a^t y_n(s)ds \end{bmatrix},$$

Так как

$$\frac{d}{dt}\int_a^t y_i(s)ds = y_i(t),$$

то производная $v(t)$, как следует из предыдущего, равна вектор-функции y(t):

$$\frac{dv}{dt}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}=y(t).$$

Это дает нам основание считать, что

$$v(t)=\int_a^t y(s)ds \ ,$$

т.е.

$$\int_a^t y(s)ds=\begin{bmatrix} \int_a^t y_1(s)ds \\ \int_a^t y_2(s)ds \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \int_a^t y_n(s)ds \end{bmatrix}.$$

В частности,

$$\int_a^b y(s)ds=\begin{bmatrix} \int_a^b y_1(s)ds \\ \int_a^b y_2(s)ds \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \int_a^b y_n(s)ds \end{bmatrix}.$$

Понятия вектор функции y(t) и матричной функции A(t), позволяют нам записать условия (2), (3), как легко проверить, в векторном виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{bmatrix} \text{ при } t=t_0,$$

или

$$\frac{dy}{dt}(t) \equiv A(t)\,y(t),\;\; y(t) = y^0 \text{ при } t = t_0, \quad y^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \cdots \\ y_n^0 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Следовательно, в векторной записи задача Коши (4) принимает вид:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y,\;\; y = y^0 \text{ при } t = t_0. \qquad (6)$$

Теперь проблема формулируется следующим образом: требуется найти вектор-функцию y(t) такую, чтобы при подстановке y(t) в (6) условия задачи Коши превратились в тождества (5).

Рассмотрим пример векторного представления задачи Коши:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\,y_2 = 0\,y_1 + (-1)\,y_2$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \;y_1 = 1\,y_1 + \;0\,y_2,$$
$$y_1 = y_1^0, \quad y_2 = y_2^0 \text{ при } t = t_0.$$

Введем обозначения вектор-функции $y(t)$ и матрицы A :

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это позволяет представить задачу Коши в виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} \text{ при } t = t_0,$$

или

$$\frac{dy}{dt} = Ay,\;\; y = y^0 \text{ при } t = t_0.$$

Иногда мы будем рассматривать задачу Коши для матричного однородного дифференциального уравнения:

$$t \in [t_1, t_2],\;\; t_0 \in [t_1, t_2]$$

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y,\;\; Y = Y^0 \text{ при } t = t_0. \qquad (7)$$

Решением (7) является (n x n) матричная функция Y(t),

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

которая при подстановке в (7) обращает матричное дифференциальное уравнение в тождество

$$\frac{d}{dt}Y(t) \equiv A(t)Y(t), \quad t \in [t_1, t_2], \tag{8}$$

и, кроме того, при $t = t_0$ совпадает с заданной матрицей Y^0,

$$Y(t_0) = Y^0, \quad Y^0 = \begin{bmatrix} y_{11}^0 & y_{12}^0 & \dots & y_{1n}^0 \\ y_{21}^0 & y_{22}^0 & \dots & y_{2n}^0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ y_{n1}^0 & y_{n2}^0 & \dots & y_{nn}^0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, …, $Y_n(t)$ столбцы $Y(t)$. Соответственно, $Y_1^0 {}_, Y_2^0, ..., Y_n^0$ - столбцы матрицы Y^0:

$$Y(t) = [Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)], \qquad Y^0 = [Y_1^0 {}_, Y_2^0, ..., Y_n^0].$$

Так как j-ым столбцом матрицы $A(t)Y(t)$ является вектор столбец $A(t)Y_j(t)$, то, приравняв столбцы матриц левых и правых частей тождества (8), получим, что столбцы $Y(t)$ являются решениями серии задач Коши типа (6):

$$\frac{dY_i}{dt} = A(t)Y_i, \; Y_i = Y_i^0 \text{ при } t = t_0,\; i = 1,2,\dots,n. \tag{9}$$

В то же время задачу Коши (7) можно рассматривать как серию из n^2 задач Коши относительно элементов матрицы $Y(t)$;

$$i = 1,2,...,n.$$

$$\frac{dy_{ij}}{dt} = a_{i1}(t)y_{1j} + a_{i2}y_{2j} + ... + a_{in}y_{nj}, \quad y_{ij} = y_{ij}^0 \text{ при } t = t_0. \tag{10}$$

Приведем еще одно представление задачи Коши (7). Введем в рассмотрение составные вектор-функции $V(t)$ и вектор V^0, составленные из вектор-функций $Y_1(t)$,$Y_2(t)$,.., $Y_n(t)$ и векторов $Y_1^0 {}_, Y_2^0, ..., Y_n^0$:

$$V(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \dots\dots \\ Y_n(t) \end{bmatrix}, \quad V^0 = \begin{bmatrix} Y_1^0 \\ Y_2^0 \\ \dots\dots \\ Y_n^0 \end{bmatrix},$$

т.е. имеющие по n^2 компонент $y_{ij}(t)$ и y_{ij}^0 соответственно. При этом задача Коши (7) преобразуется к векторному виду:

$$\frac{dV}{dt} = \begin{bmatrix} A(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(t) & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A(t) \end{bmatrix} V, \quad V = V^0 \text{ при } t = t_0, \qquad (11)$$

с блочно-диагональной матричной функцией, где 0 – (n x n) – нулевые матрицы.

Пусть дана задача Коши для матричного уравнения:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^0 & y_{12}^0 \\ y_{21}^0 & y_{22}^0 \end{bmatrix} \text{ при } t = t_0.$$

Используя обозначения

$$Y_1(t) = \begin{bmatrix} y_{11}(t) \\ y_{21}(t) \end{bmatrix}, \; Y_2(t) = \begin{bmatrix} y_{12}(t) \\ y_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad Y_1^0 = \begin{bmatrix} y_{11}^0 \\ y_{21}^0 \end{bmatrix}, \quad Y_2^0 = \begin{bmatrix} y_{12}^0 \\ y_{22}^0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

приведем два эквивалентных представления сформулированной задачи Коши:

А)
$$\frac{dY_1}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y_1, \quad Y_1 = Y_1^0 \text{ при } t = t_0$$
$$\frac{dY_2}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y_2, \quad Y_2 = Y_2^0 \text{ при } t = t_0$$

-серия из 2-х задач Коши для векторного уравнения, и

В)
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1^0 \\ Y_2^0 \end{bmatrix} \text{ при } t = t_0.$$

- задача Коши для векторного уравнения.

Для дальнейшего важно отметить, что из доказательства существования единственного решения задачи Коши для векторного уравнения (6) следует это же утверждение в случае задачи Коши для матричного уравнения (7), поскольку имеет место представление (7) в виде (11).

Это же утверждение относится к задаче Коши для однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами:

$$t \in [t_1, t_2],\ t_0 \in [t_1, t_2]$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + p_n(t)x = 0, \qquad (12)$$

$$x = y_1^0,\quad \frac{dx}{dt} = y_2^0, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = y_n^0, \quad \text{при } t = t_0.$$

Здесь $p_j(t)$, $j = 1,2,\ldots,n$, –непрерывные функции, заданные на отрезке $[t_1, t_2]$; $y_2^0, \ldots, y_n^0$ -заданные числа. Требуется найти функцию x(t), n раз непрерывно дифференцируемую на отрезке $[t_1, t_2]$, при подстановке которой в (12) условия задачи Коши будут выполняться тождественно.

Пусть x(t) – решение (12). Введем обозначения:

$$y_1(t) = x(t),\ y_2(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \frac{dy_1}{dt}(t),\ y_3(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t) = \frac{dy_2}{dt}(t), \ldots, y_n(t) = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t) = \frac{dy_{n-1}}{dt}.$$

Привлекая сюда дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{d^n x}{dt^n}(t) = -[\,p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t) + \ldots + p_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}(t) + p_n(t)x(t)],$$

или

$$\frac{dy_n}{dt}(t) = -[\,p_n(t)y_1(t) + p_{n-1}(t)y_2(t) + \ldots + p_n(t)y_n(t)].$$

В результате имеем n равенств, выполняющихся тождественно:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt}(t) = y_2(t)\\
&\frac{dy_2}{dt}(t) = y_3(t)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{dy_{n-1}}{dt}(t) = y_n(t)\\
&\frac{dy_n}{dt}(t) = -[\,p_n(t)y_1(t) + p_{n-1}(t)y_2(t) + \ldots + p_n(t)y_n(t)]
\end{aligned} \qquad (13)$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию y(t) с компонентами:

$$y_1(t) = x(t),\ y_2(t) = \frac{dx}{dt}(t),\quad y_3(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t), \ldots, y_n(t) = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t). \qquad (14)$$

Это позволяет представить систему (13) и начальные условия задачи Коши (12) в векторном виде:

$$\frac{dy}{dt}(t) \equiv \overline{A}(t)\, y(t),\ \ y(t_0) = y^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{bmatrix}$$

где $\overline{A}(t)$ - матричная функция, определяемая заданием коэффициетов $p_j(t)$:

$$\overline{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_n(t) & -p_{n-1}(t) & -p_{n-2}(t) & \dots & -p_1(t) \end{bmatrix}.$$

аким образом, задаче Коши (12) ставится в соответствие следующая задача Коши в векторном виде:

$$\frac{dy}{dt} = \overline{A}(t)\, y,\ \ y = y^0 \text{ при } t = t_0. \qquad (15)$$

В силу (14) имеет место утверждение. Пусть y(t) – решение задачи Коши (15). Тогда функция x(t) = y_1(t), т.е. равная первой компоненте вектор-функции y(t), будет решением задачи Коши (12). И наоборот. Если x(t) – решение задачи Коши (12), то вектор-функция y(t) с компонентами (14),

$$y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{d^2x}{dt^2}(t) \\ \dots\dots \\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t) \end{bmatrix},$$

будет решением задачи Коши (15).