



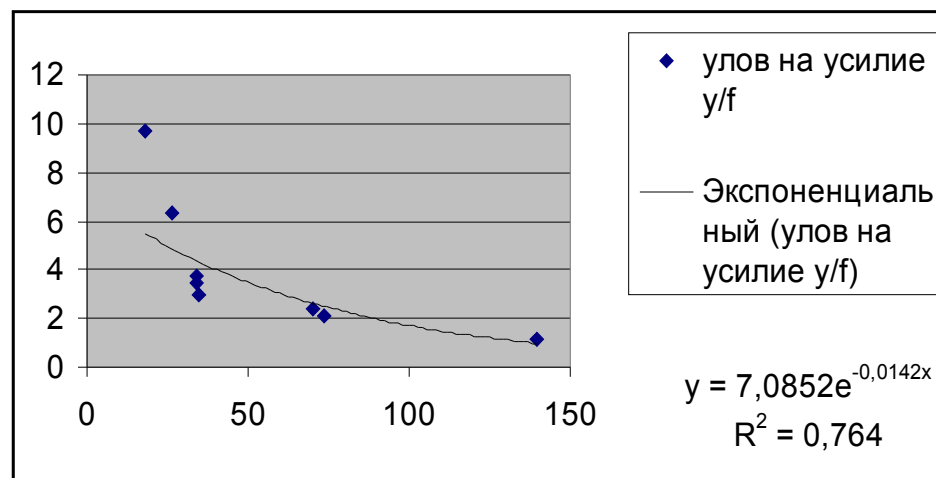
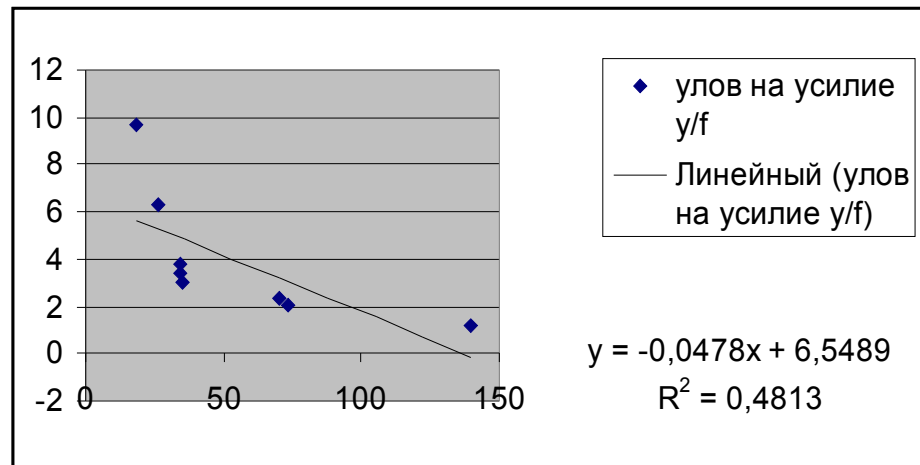
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ПРОМЫСЛОВЫХ ПОПУЛЯЦИЙ

- **Е. Я. Фрисман**
- **Институт комплексного анализа
региональных проблем ДВО РАН**
- **г. Биробиджан**

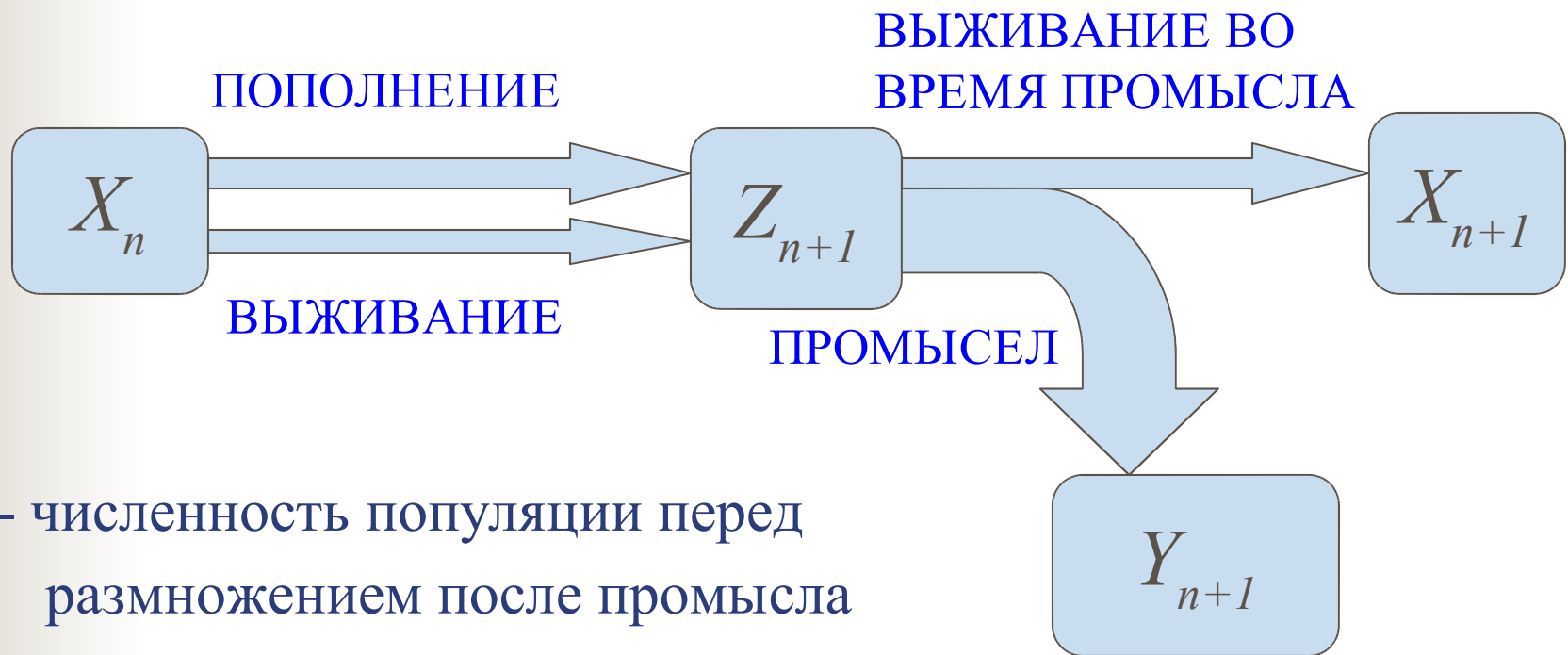
Метод Шефера

Динамика вылова хека за 1966-1973

год	улов	усилие	улов на усилие
	y	f	y/f
1966	128,3	34,248	3,746
1967	166,9	70,233	2,376
1968	103,5	34,817	2,973
1969	167,9	26,64	6,303
1970	167,2	139,73	1,197
1971	176,7	18,289	9,662
1972	117,3	34,087	3,441
1973	152,9	73,655	2,076



Изменение численности промысловой популяции в течении годового

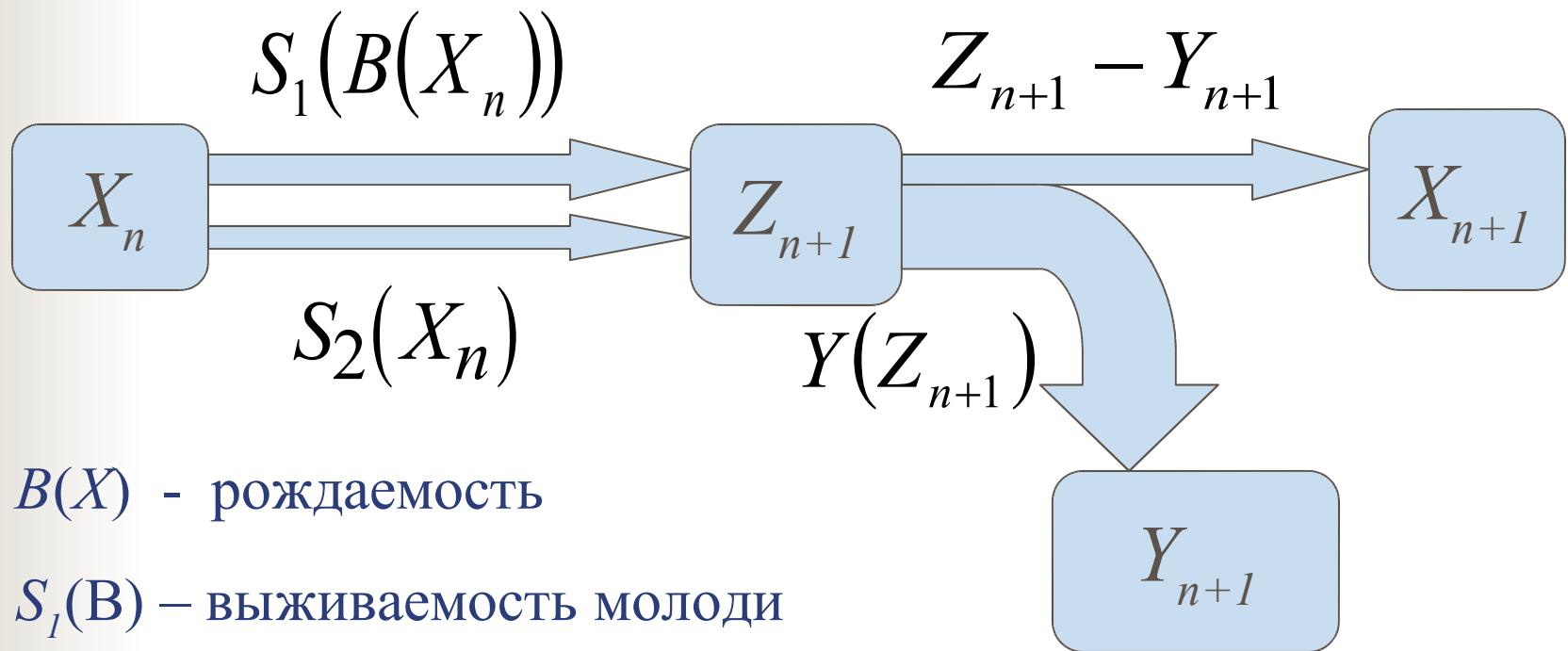


X_n - численность популяции перед размножением после промысла

Z_n - численность популяции после размножения и выживания перед промыслом

Y_n — величина промыслового изъятия
 n — номер поколения

Изменение численности промысловой популяции (формализация)



$B(X)$ - рождаемость

$S_1(B)$ – выживаемость молодежи

$S_2(X)$ – выживаемость
репродуктивной
возрастной группы

$Y(Z)$ – функция промысла:
зависимость размера изъятия
от численности популяции



Функция промысла

Z – численность, f - промысловые усилия

Модель Шеффера:

$$Y(f, Z) = kfZ$$

«Трофическая» функция с насыщением, как по численности популяции, так и по числу усилий

$$Y(f, Z) = \frac{\rho fZ}{(m + f)(1 + \mu Z)}$$

при $\rho=1$, $\mu=0$

$$Y(f, Z) = \frac{fZ}{m + f}$$

Уравнение динамики промышленной популяции

$$X_{n+1} = Z_{n+1} - Y_{n+1} = F(X_n) - Y(f, F(X_n)) = \Phi(X_n)$$

$$X_{n+1} = F(X_n) - \frac{f_n F(X_n)}{m + f_n} = \frac{m F(X_n)}{m + f_n}$$

при

$$F(X) = aX e^{-bX}$$

$$X_{n+1} = \frac{maX_n e^{-bX_n}}{m + f_n}$$

или

$$x_{n+1} = \frac{amx_n e^{-x_n}}{m + f_n}$$

где $x = bX$

Оценки параметров модели по данным промысловой статистики

Оцениваемые параметры a, m, k, x_0

$$U = \sum_n (Y_n - Y_n^*)^2 \rightarrow \min$$

$$Y_n = \frac{f_n F(X_{n-1})}{m + f_n} = \frac{f_n a X_{n-1} e^{-b X_{n-1}}}{m + f_n} = \frac{k f_n a x_{n-1} e^{-x_{n-1}}}{m + f_n}$$

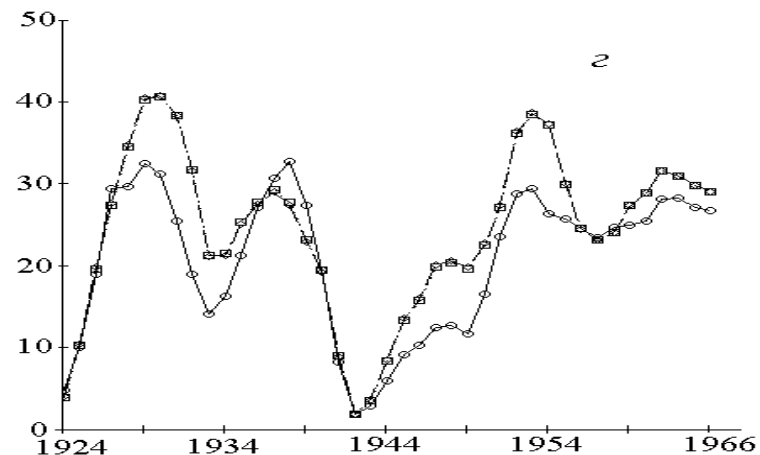
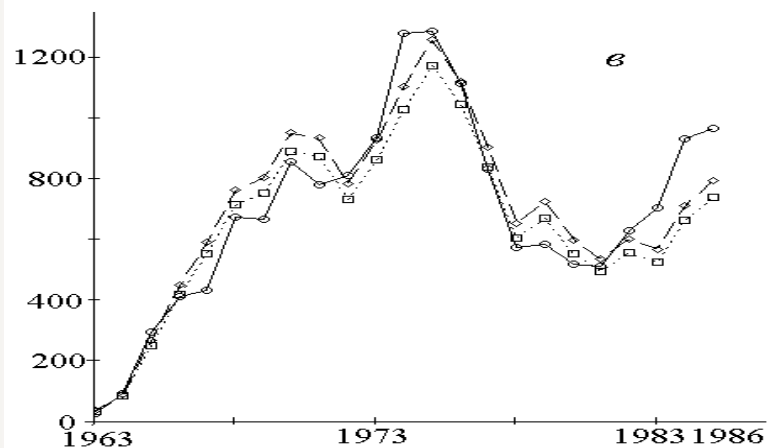
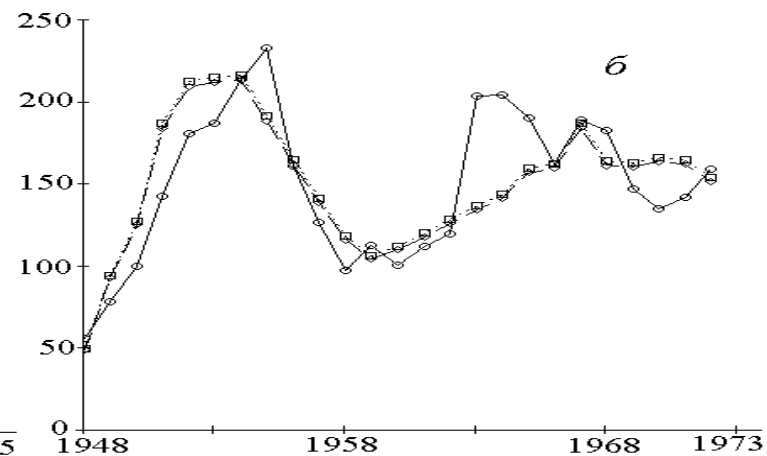
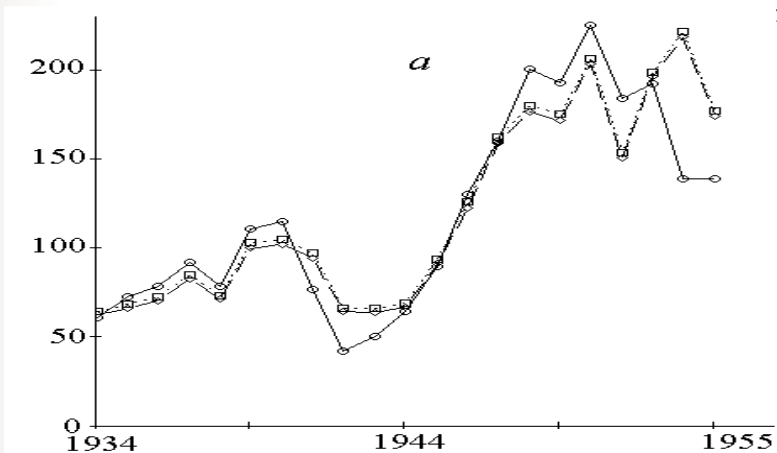
Y_n^* и f_n - объемы годовых уловов и величины
затраченных усилий, соответственно



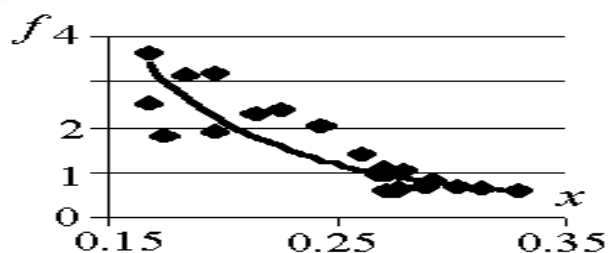
Значения параметров модели, полученные по данным реального промысла

Вид	Тунец	Салака	Минтай	Краб
a	4.08 (4.08)	2.38 (2.39)	2.21 (2.17)	2.58 (2.50)
m	0.03 (0.03)	793.54 (790.70)	73.86 (75.06)	2.80 (2.85)
k	274.90 (274.82)	657.96 (661.36)	4591 (4495)	95.59 (95.59)
x_0	0.8 (0.8)	1.5 (1.5)	0.2 (0.2)	0.95 (0.95)
R^2	0.81 (0.82)	0.63 (0.63)	0.87 (0.87)	0.81 (0.82)
δ	16.5%	9.8%	22%	9.2%

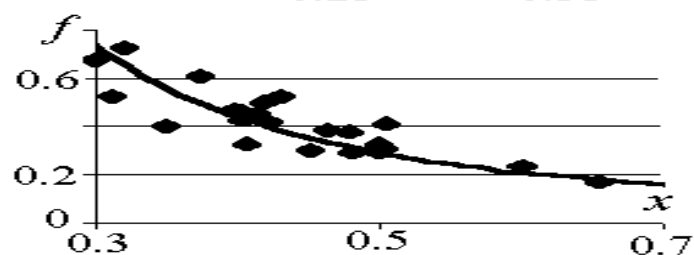
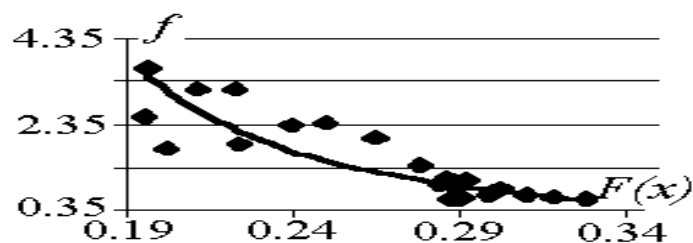
*Реальная и модельная динамика уловов тунца (млн. фунтов, а),
салаки (тыс. ц, б), минтая (тыс. т, в) и краба (млн. шт., г).*



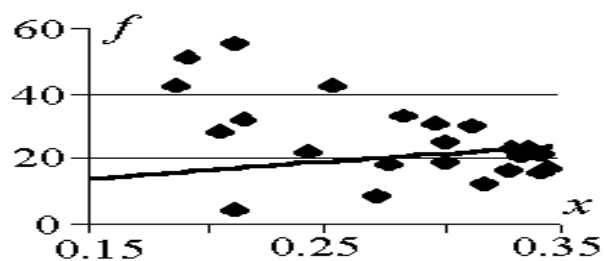
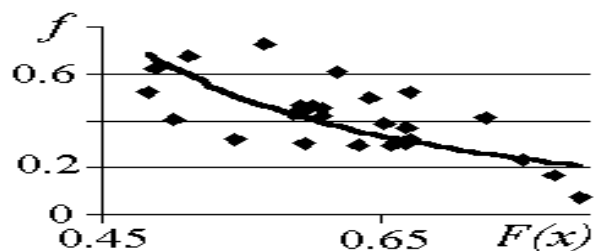
Аппроксимация зависимостей $f(x)$ и $f(F)$ степенными функциями для тунца (а), салаки (б), минтая (в) и краба (г)



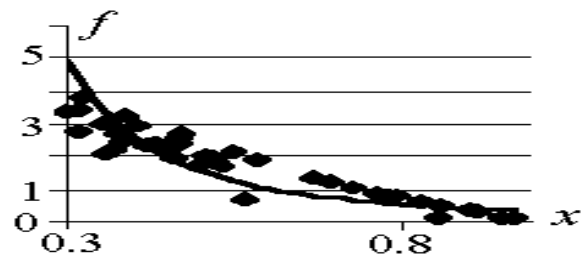
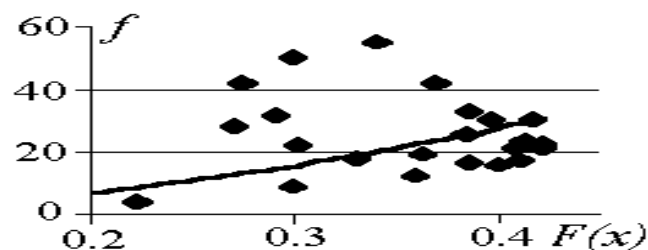
а



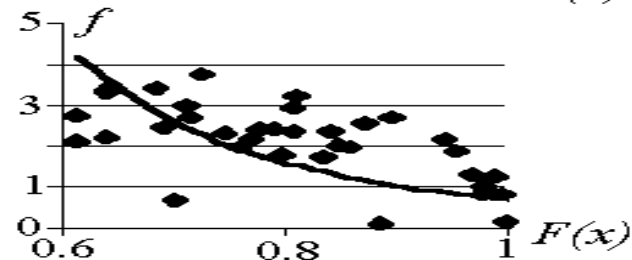
б



в



г



Значения параметров аппроксимации

Вид	$f = \gamma x^{\alpha}$			$f = \gamma [F(x)]^{\alpha}$		
	γ	α	R^2	γ	α	R^2
Тунец	300.48	-2.65	0.79	128.52	-3.43	0.78
Салака	83.08	-1.82	0.78	121.67	-2.37	0.47
Минтай	46.64	0.64	0.04	167.23	1.95	0.37
Краб	0.33	-2.26	0.78	0.72	-3.64	0.41



Уравнение динамики при степенной зависимости усилий от численности

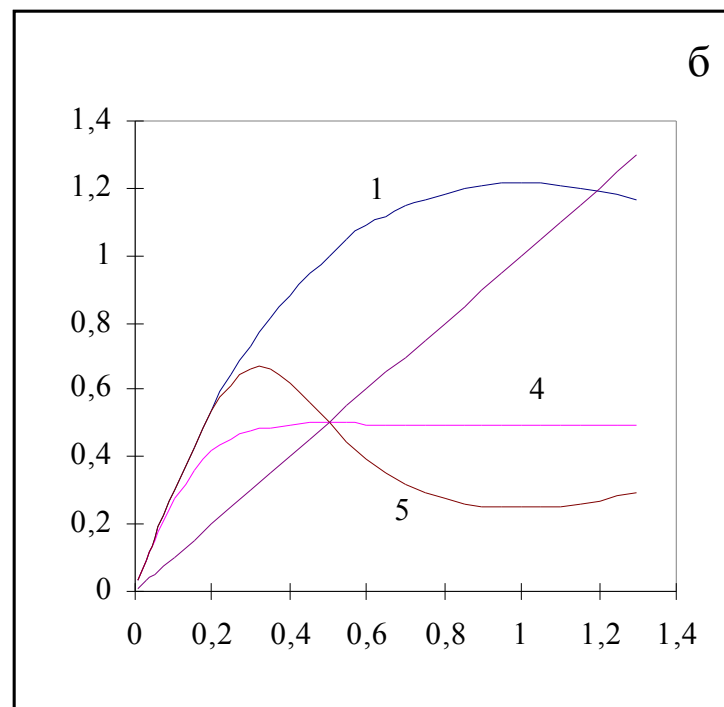
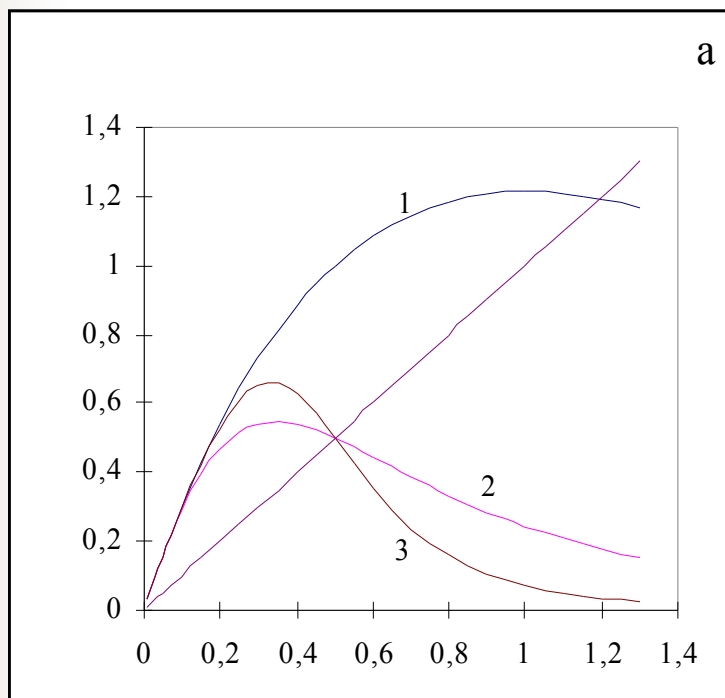
$$1. f = \gamma x^\alpha$$

$$x_{n+1} = \frac{am_0 x_n e^{-x_n}}{m_0 + x_n^\alpha} = \Phi_1(x)$$

$$2. f = \gamma [F(x)]^\alpha$$

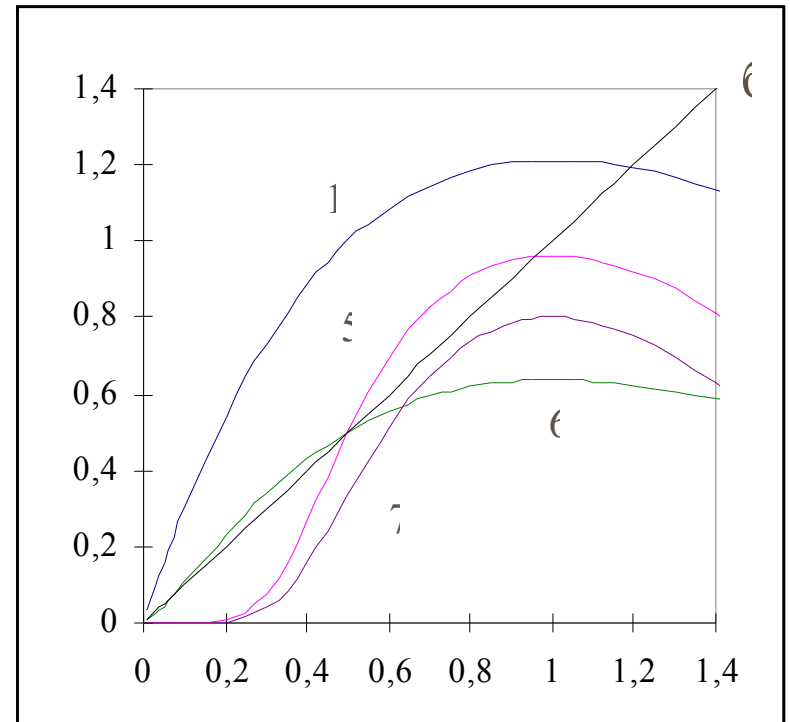
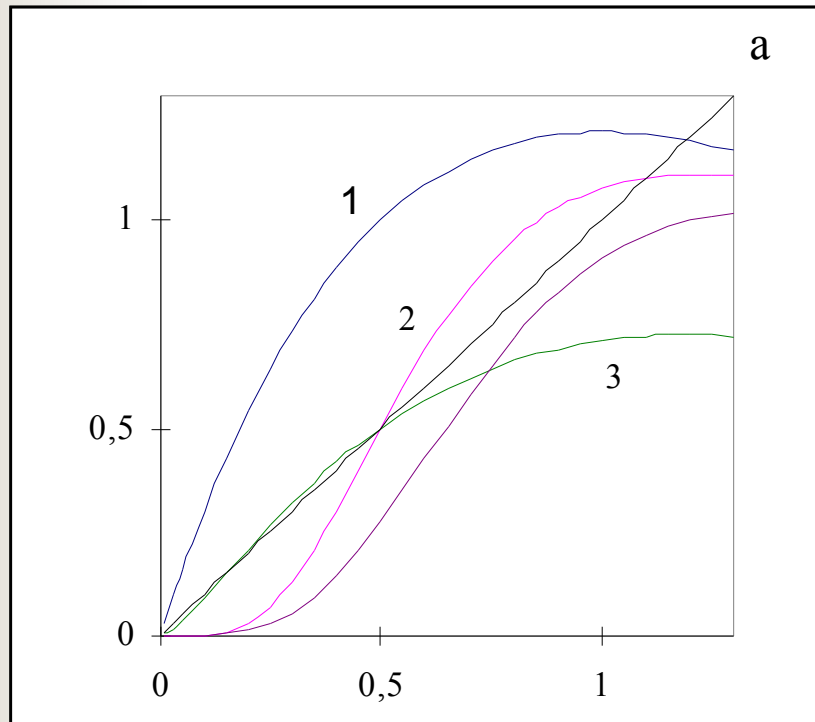
$$x_{n+1} = \frac{am_0 x_n e^{-x_n}}{m_0 + [\alpha x_n e^{-x_n}]^\alpha} = \Phi_2(x)$$

Графики функций $\Phi 1$ (а) и $\Phi 2$ (б) при положительном значении альфа



1) отсутствие промысла; 2) $\alpha = 2$, $m = 1/4$;
3) $\alpha = 4$, $m = 1/16$; 4) $\alpha = 2$, $m = 1$; 5) $\alpha = 7$, $m = 1$

Графики функций $\Phi 1$ (а) и $\Phi 2$ (б) при отрицательном значении альфа



- 1) отсутствие промысла; 2) $\alpha = -3$, $m=8$; 3) $\alpha = -0.5$, $m=1.42$;
4) $\alpha = -3$, $m=3$; 5) $\alpha = -0.5$, $m=1$; 6) $\alpha = -7$, $m=1$; 7) $\alpha = -7$, $m=0.5$

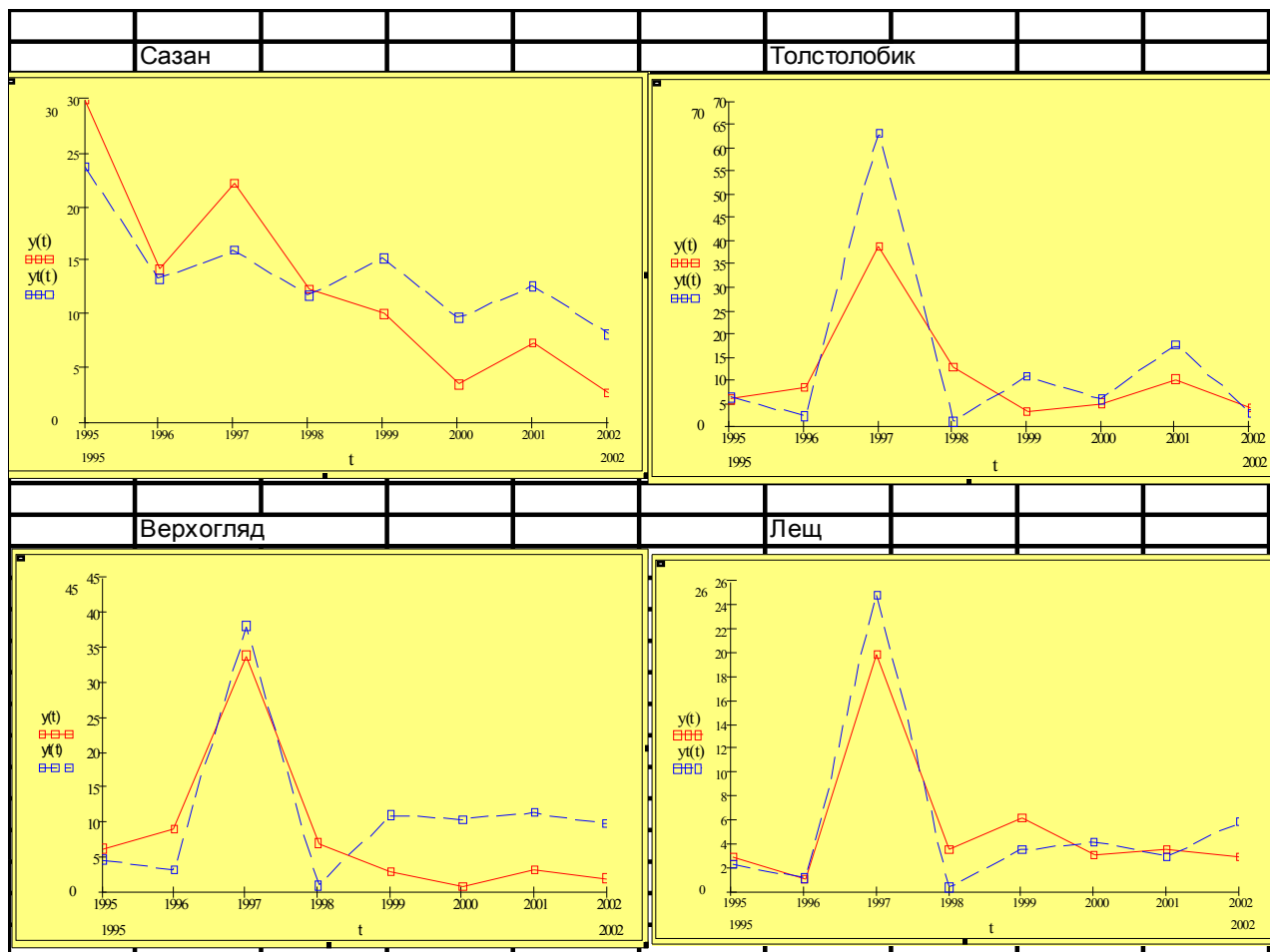


Значения параметров аппроксимации для рыб ЕАО

Вид рыб	Параметры						
	a	k	m_0	α	x_0	r_{Y,Y_t}	r^2
Толстолобик	15,96	47,07	0,46	-0,71	3,941	0,92	0,8464
Верхогляд	17,64	53,16	4,64	-0,22	4,287	0,83	0,6889
Сазан	19,44	24,1	1443,77	1,32	0,29	0,93	0,8649
Лещ	17,77	105,36	7,11	-0,43	0,075	0,96	0,9216

Реальная и модельная динамика уловов для рыб

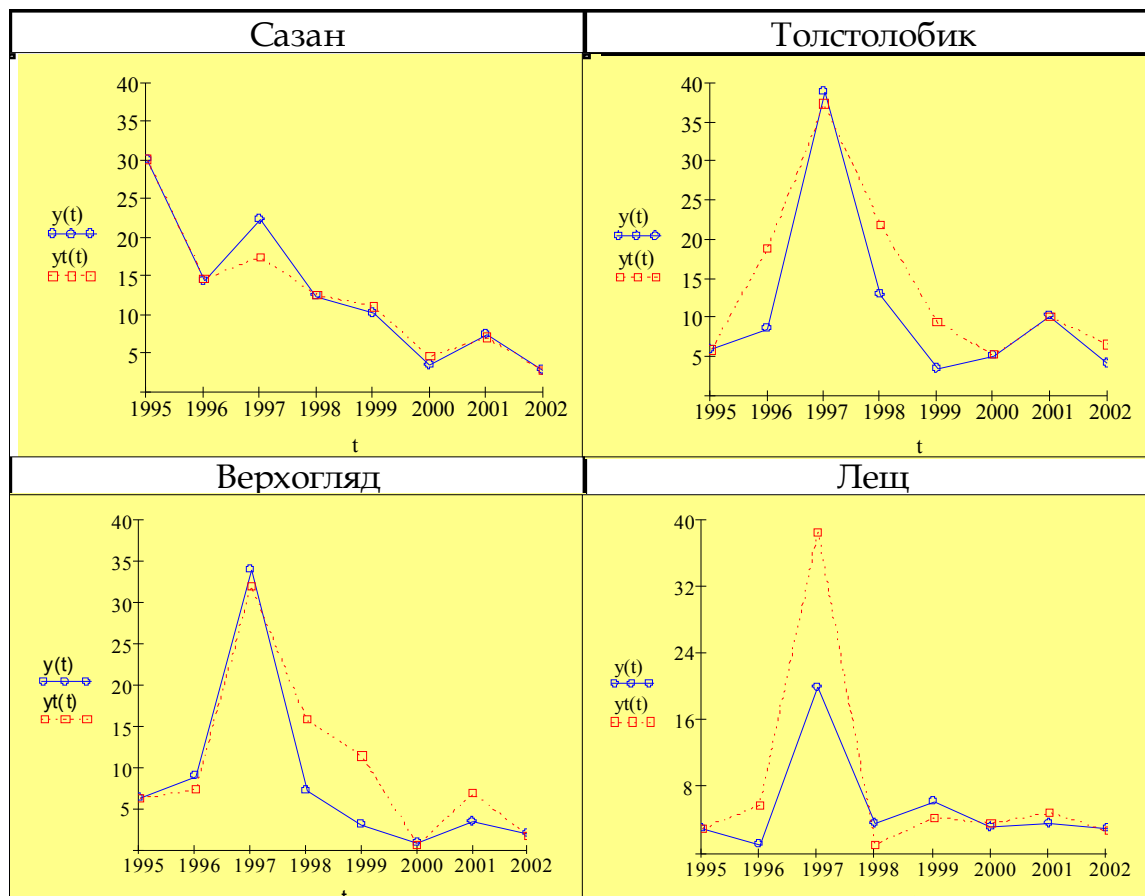
ЕАО



Значения параметров аппроксимации для рыб ЕАО с учетом падения промысла

Вид рыб	Параметры							
	a	k	m_0	α	x_0	d	R^2	Apr
Толстолобик	15,4222	46,2667	179,0078	0,8143	3,935	0,3934	0,8465	26,24%
Верхогляд	17,1468	10,8443	0,4172	-0,2171	3,911	0,1234	0,8411	33,07%
Сазан	15,4601	63,6792	5295,1927	1,1921	0,2837	0,6183	0,9623	8,64%
Лещ	17,7723	562,6842	55,2306	-0,1048	0,07938	0,2912	0,9255	59,46%
	Репродук-	Нормиро-	Определяют стратегию		Начальная	Доля от	Кэффи-	Относ. ошибка
	тивный	вочный	промысла		численность	начального	циент детер-	аппроксимации
	потенциал	коэффициент				интереса	минации	

Реальная и модельная динамика уловов для рыб ЕАО с учетом падения промысла



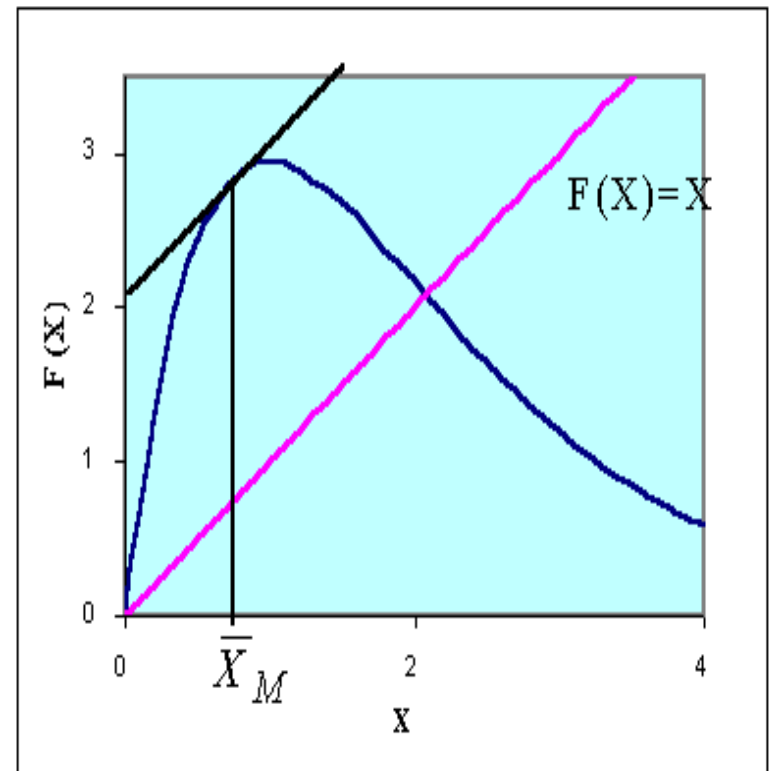
Стационарное состояние и максимальный уровень изъятия

$$\bar{X} = F(\bar{X}) - \bar{Y}$$

$$\bar{Y} = F(\bar{X}) - \bar{X}$$

$$\bar{Y}' = F'(\bar{X}_M) - 1 = 0$$

$$F'(\bar{X}_M) = 1$$



Модель Рикера

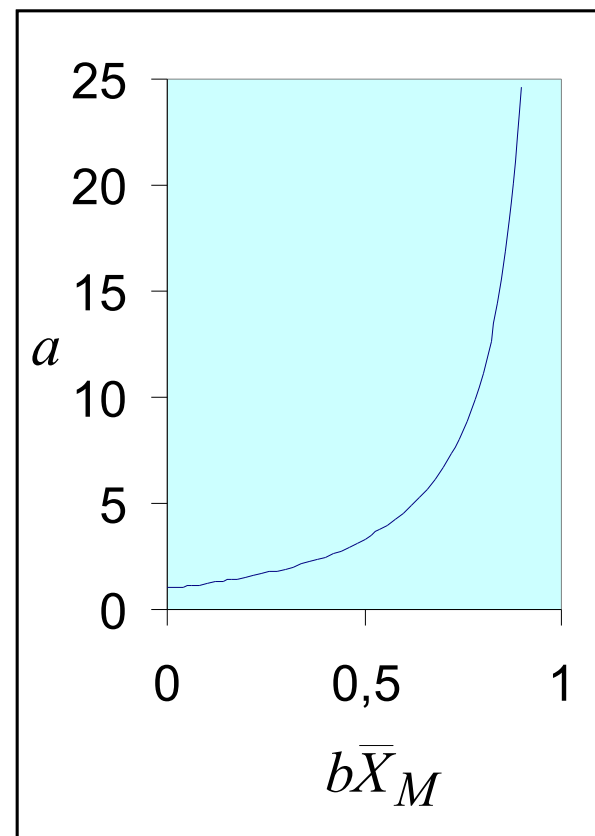
$$F(X) = a e^{-bX}$$

$$F'(X) = a e^{-bX} (1 - bX)$$

$$a e^{-b\bar{X}_M} (1 - b\bar{X}_M) = 1$$

$$a = e^{b\bar{X}_M} / (1 - b\bar{X}_M)$$

$$b\bar{X}_M < 1, \quad \bar{X}_M < 1/b.$$



Модель Рикера

$$F(X) = aX e^{-bX}$$

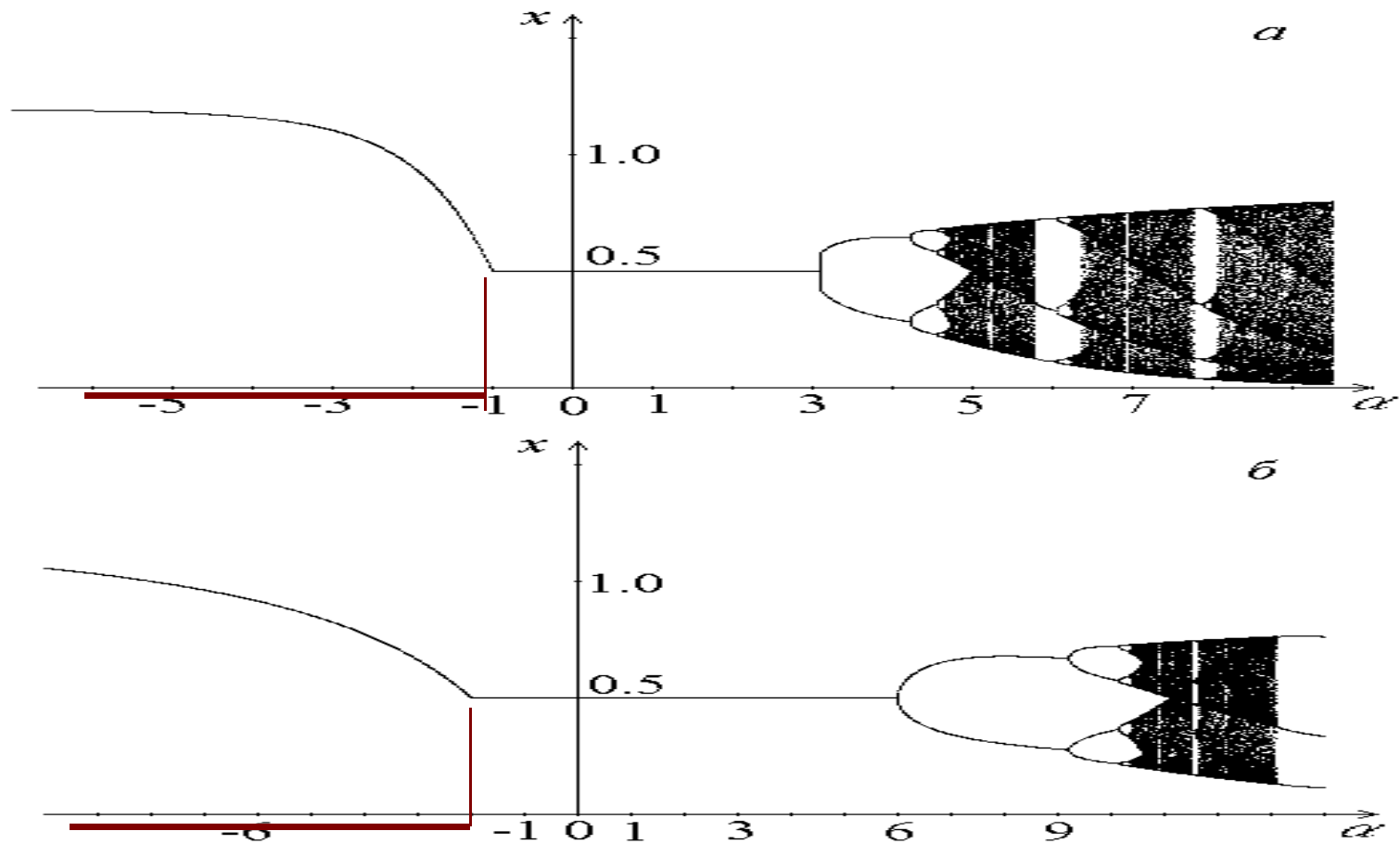
$$a = e^{b\bar{X}_M} / (1 - b\bar{X}_M)$$

$$F(\bar{X}_M) = \frac{e^{b\bar{X}_M}}{1 - b\bar{X}_M} \bar{X}_M e^{-b\bar{X}_M} = \frac{\bar{X}_M}{1 - b\bar{X}_M}$$

$$\bar{Y}_M = F(\bar{X}_M) - \bar{X}_M = \frac{\bar{X}_M}{1 - b\bar{X}_M} - \bar{X}_M = \frac{b\bar{X}_M^2}{1 - b\bar{X}_M}$$

$$\bar{u}_o = \frac{\bar{Y}_M}{F(\bar{X}_M)} = b\bar{X}_M$$

Бифуркационная диаграмма модели в зависимости от параметра α





Уравнение воспроизводства с учетом запасов доступного корма

$$b_n = b_0 - b_1 C_n - b_2 C_{n+1}$$

C_n и C_{n+1} запасы доступных кормов
в смежные годы
 n и $n+1$, соответственно

$$Z_{n+1} = F(X_n) = aX_n e^{-(b_0 - b_1 C_n - b_2 C_{n+1})X_n}$$



Базовая модель динамики промысловой популяции

$$X_{n+1} = \frac{aX_n e^{-(b_0 - b_1 C_n - b_2 C_{n+1})X_n}}{1 + A[aX_n e^{-(b_0 - b_1 C_n - b_2 C_{n+1})X_n}]^s}$$

$$Y_{n+1} = \frac{A[aX_n e^{-(b_0 - b_1 C_n - b_2 C_{n+1})X_n}]^{s+1}}{1 + A[aX_n e^{-(b_0 - b_1 C_n - b_2 C_{n+1})X_n}]^s}$$

Данные о промысле белки и урожайности хвойных

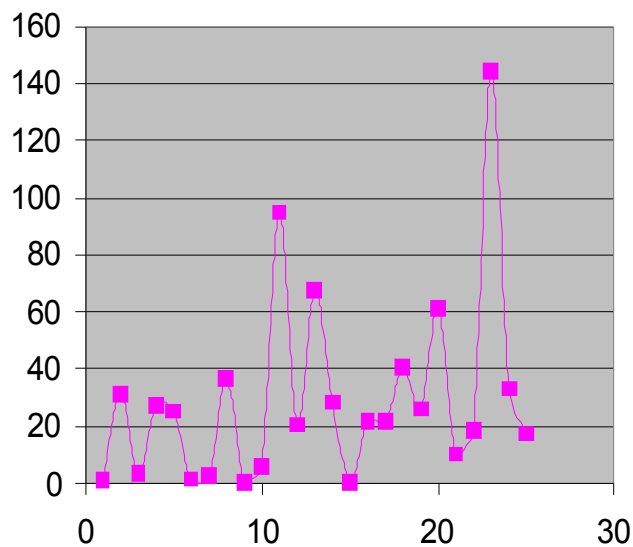


Рис.1. Количество добытых шкурок белки

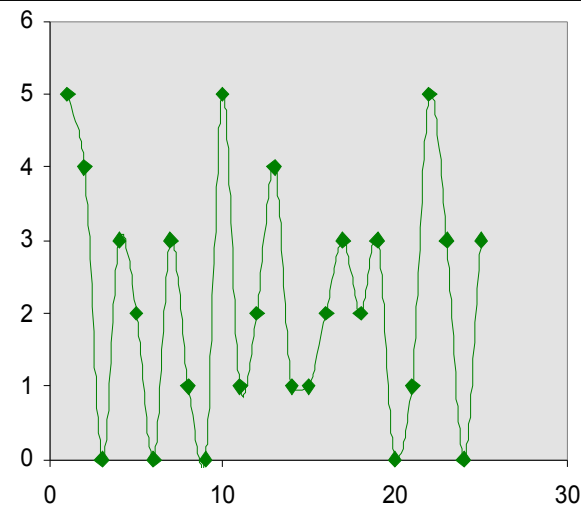
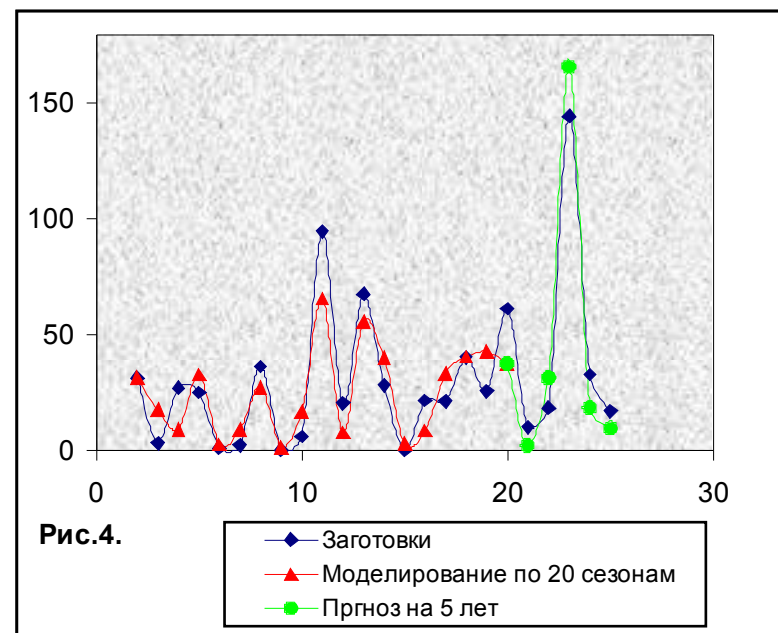
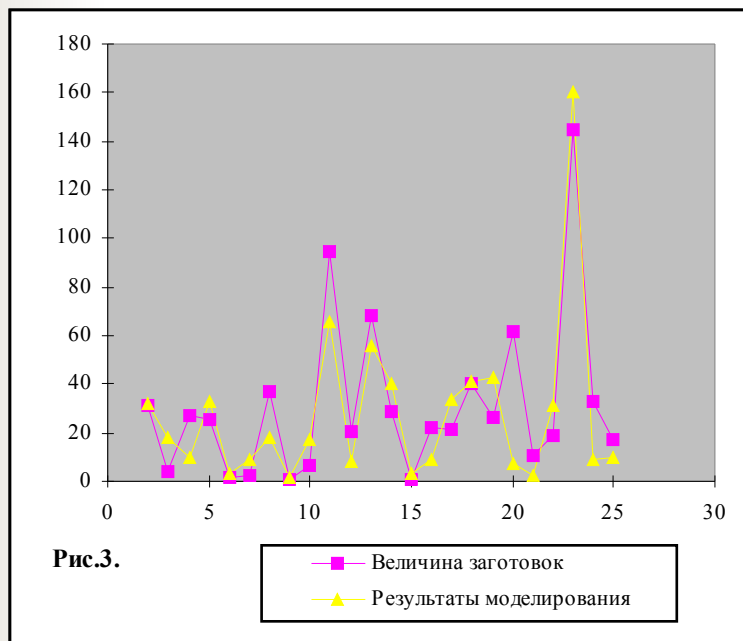


Рис.2 .Урожайность семян
хвойных пород в баллах

Данные о промысле и результаты моделирования



$a = 8,89$ $b_0 = 0,158$ $b_1 = 0,023$ $b_2 = 0,015$ $s = 1,04$ $A = 0,049$

$a = 8,94$ $b_0 = 0,149$ $b_1 = 0,019$ $b_2 = 0,010$ $s = 1,09$ $A = 0,051$

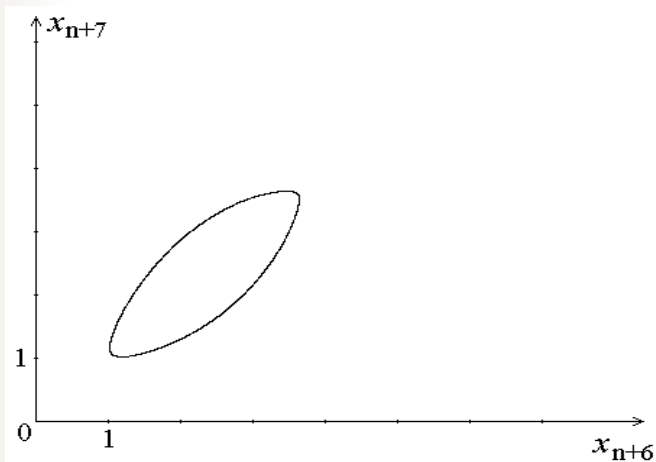
Моделирование динамики популяций лососевых рыб

$$x_{n+k} = a \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{k-i} x_{n+i} e^{-x_{n+i}}$$

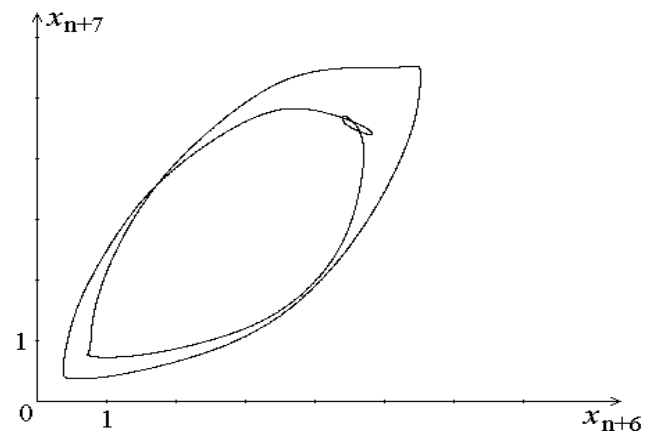
Возрастная структура Камчатских популяций лососевых

Вид	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7
Кета	0	0	0.649	0.333	0.018	-	-
Нерка	0	0	0.044	0.487	0.469	-	-
Кижуч	0	0	0.413	0.01	0.553	0.013	0.011
Чавыча	0	0	0	0.126	0.368	0.465	0.041

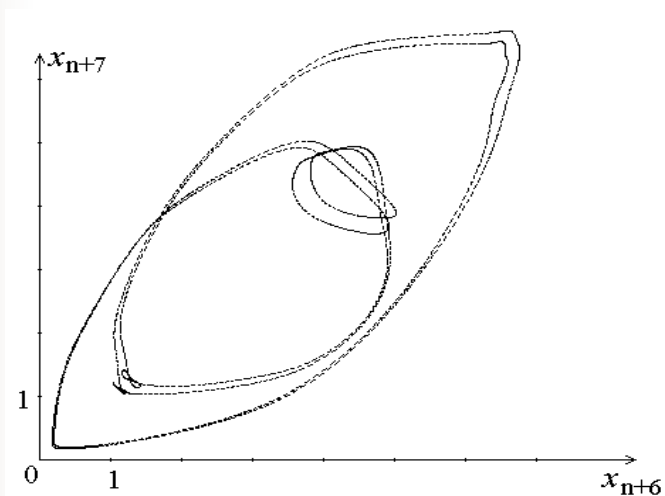
Фазовые портреты модели популяции чавычи



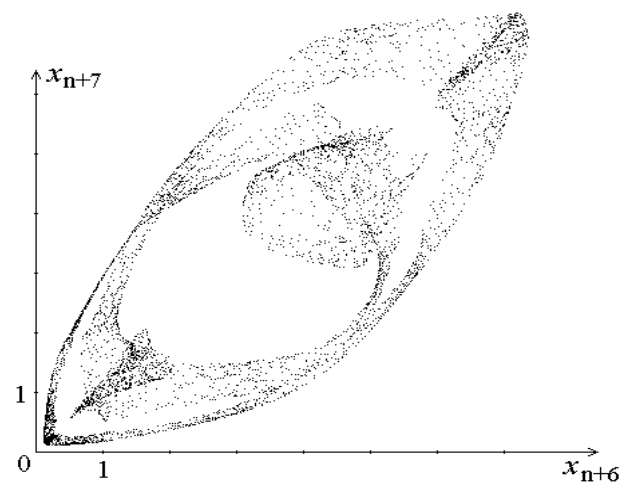
$a=8.05$



$a=15.5$



$a=18.5$



$a=20.0$

Параметры модели полученные на основе данных промысла

Вид	Нерка	Кета	Кижуч	Чавыча
a	11.26 (11.26)	2.27 (2.62)	5.19 (5.13)	13.30 (13.30)
p	24.60 (22.77)	53.73 (52.3)	4.84 (4.96)	26.12 (17.98)
m	91.06 (139.06)	6.27 (5.37)	0.5 (0.5)	6.79 (3.27)
α	3.76 (4.34)	-2.67 (-2.77)	-5.14 (-5.3)	-1.52 (-1.77)
R^2	0.81 (0.81)	0.61 (0.76)	0.80 (0.84)	0.73 (0.69)
δ	26.1%	17.8%	31.3%	13.3%



Результаты анализа модели

- В отсутствии промысла характер динамики численности популяции определяется величиной репродуктивного потенциала и наличием кормовых запасов.
- При небольшом и среднем репродуктивном потенциале колебания численности фактически отражают (с некоторым запаздыванием) колебания пищевых запасов. Такую динамику мы наблюдаем у кабана, изюбря и некоторых других копытных.

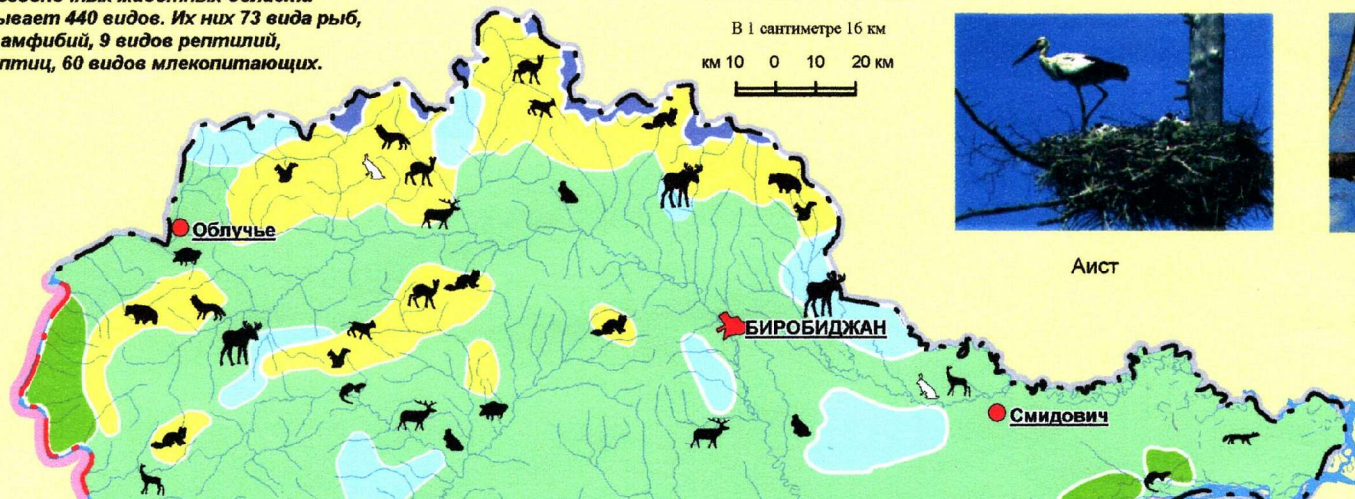
ЖИВОТНЫЙ МИР

Фауна позвоночных животных области насчитывает 440 видов. Их них 73 вида рыб, 7 видов амфибий, 9 видов рептилий, 291 вид птиц, 60 видов млекопитающих.

Масштаб 1:1 600 000

В 1 сантиметре 16 км

км 10 0 10 20 км

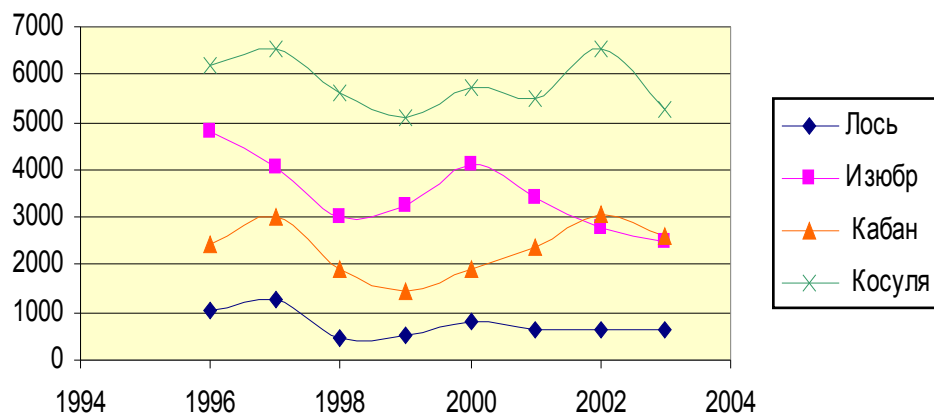


Аист

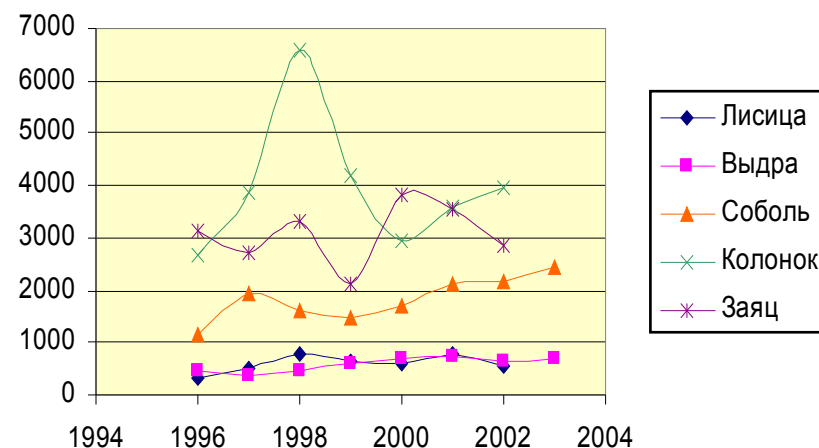


Белка

Динамика численности копытных



Динамика численности пушных





Результаты анализа модели

- При большом репродуктивном потенциале колебания численности становятся резче и определяются, в основном, плотностно-зависимыми факторами, а колебания запасов корма играют фоновую роль. Типичный пример белка и колонок.
- Ведение промысла снижает остроту колебаний, связанную с повышенной плотностью, но сохраняет колебания, связанные с изменением в кормовой базе.



Результаты анализа модели

- Поскольку интенсивность промысла зависит от уровня численности, промысел может как «раскачивать» вынужденные колебания, так и приводить к резкому падению численности популяции вплоть до ее полного вырождения.



Благодарю за внимание!