

## Модель глобальной динамики

Структура и уравнения модели Форрестера были им предложены в конце 60-х годов. В 1972 году группой системной динамики при Массачусетском технологическом институте (США) выполнены работы, развивающие, детализирующие и углубляющие математическую модель Форрестера на основе меньшей степени агрегации глобальной динамической системы [2].

### 1.1. Переменные

В модели Форрестера [1] развитие общества описывается пятью основными «глобальными» переменными (функциями времени):

$P$  – население (число людей, населяющих Землю);

$V$  – капитал (капиталовложения в промышленности и сельском хозяйстве всей Земли);

$S$  – доля сельхозинвестиций (доля всего капитала  $V$ , вложенная в сельское хозяйство);

$R$  – ресурсы (невозобновляемые природные ресурсы всей Земли);

$Z$  – загрязнение (общее количество загрязнений на Земле).

Единицей времени считается год; единицей капитала считается капитал, приходящийся на душу населения в 1970 году; величина  $S$  – безразмерная; единицей ресурсов считается годовое потребление ресурсов на человека в 1970 году; единицей загрязнений считается количество загрязнений, приходящееся на одного человека в 1970 году.

Начальные данные для переменных  $P$ ,  $V$ ,  $S$ ,  $R$ ,  $Z$  относятся у Форрестера к 1900 году ( $t_{00}$ ). Соответственно

$P_{00} = 1,65 \cdot 10^9$  (чел.) (согласно статистике);

$V_{00} = 0,4 \cdot 10^9$  (ед. капитала) (принимается, что в 1900 году на человека приходилось вчетверо меньше капитала, чем в 1970 году);

$S_{00} = 0,2$ ;

$R_{00} = 900 \cdot 10^9$  (ед. ресурсов) (предполагается, что, начиная с 1900 года, ресурсов хватило бы на 250 лет при скорости их потребления, существовавшей в 1970 году);

$Z_{00} = 0,2 \cdot 10^9$  (ед. загрязнения) (считается, что в 1900 году на душу населения приходилось в восемь раз меньше загрязнений, чем в 1970 году).

В соответствии с этим, определены значения глобальных переменных в 1970 году ( $t_0$ ):

$P_0 = 3,6 \cdot 10^9$  (чел.) (согласно статистике);  $V_{00} = 3,6 \cdot 10^9$  (ед. капитала);

$S_0 = 0,3$ ;

$R_0 = 794 \cdot 10^9$  (ед. ресурсов) (здесь учитывается доля ресурсов, составляющая около 12%, израсходованная с 1900 по 1970 год);

$Z_0 = 3,6 \cdot 10^9$  (ед. загрязнения)

Наряду с абсолютными значениями переменных, вводятся и их относительные (удельные) значения:

$$P_R = \frac{P}{P_0}; \quad V_R = \frac{V}{P}; \quad S_R = V_R \frac{S}{S_0}; \quad Z_R = \frac{Z}{P}; \quad R_R = \frac{R}{R_{00}}.$$

Кроме основных глобальных переменных рассматриваются еще три важных вспомогательных переменных: материальный уровень жизни, уровень питания и качество жизни.

Величина материального уровня жизни  $M_S$  задается соотношением

$$M_S = V_R \frac{1-S}{1-S_N} \frac{E_R}{E_R^0}.$$

Здесь  $V_R(1-S)$  - удельный промышленный капитал. Множитель  $E_R$ , учитывает возрастание трудности добывания минеральных ресурсов с уменьшением их запасов, определяется по отношению  $R_R$  оставшихся ресурсов к ресурсам 1900 года заданной табличной (графической) зависимостью (рис. 1) и является унитарным в том смысле, что  $E_R=1$  при  $R_R=1$ . Делитель  $(1-S_N)E_R^0$  введен для того, чтобы  $M_S=1$  в 1970 году. Величина  $E_R^0$  равна  $E_R$  при  $R_R=R_0/R_{00}$ .

Таким образом, материальный уровень жизни зависит от двух факторов: линейно (пропорционально) от величины удельного промышленного капитала и нелинейно через унитарный мультипликативный множитель от величины ресурсов. Использование унитарных мультипликативных табличных множителей для учета нелинейного влияния различных факторов и переменных друг на друга является, по-видимому, одним из самых удачных сторон модели Форрестера.

Уровень питания определяется как произведение трех унитарных множителей

$$F_R = F_S F_P F_Z.$$

Первый множитель  $F_S$  описывает зависимость продуктивности сельского хозяйства от величины удельных сельскохозяйственных капиталовложений  $S_R$  (рис. 2). Множители  $F_P$  и  $F_Z$  учитывают понижение продуктивности сельского хозяйства из-за роста плотности населения  $P_R$  и загрязнения  $Z_R$ , соответственно (рис. 3, 4).

Качество жизни задается в виде произведения четырех унитарных множителей

$$Q = Q_M Q_F Q_P Q_Z,$$

которые отражают соответственно влияние факторов  $M_S$ ,  $F_R$ ,  $P_R$  и  $Z_R$  на качество жизни. Так увеличение материального уровня жизни и уровня питания приводит к росту качества жизни, что описывают зависимости  $Q_M(M_S)$  и  $Q_F(F_R)$  (рис. 5, 6).

## 1.2. Уравнения

Для основных глобальных переменных конструируются уравнения динамики. Фактически, взаимодействие природы и общества описывается в модели Форрестера пятью обыкновенными дифференциальными уравнениями, правая часть каждого из которых состоит из двух слагаемых – положительного и отрицательного.

Так уравнение для населения

$$\dot{P} = B - D,$$

где  $B = PC_B B_M B_F B_P B_Z$ ,  $D = PC_D D_M D_F D_P D_Z$  и выражает просто баланс между рождаемостью  $B$  и смертностью  $D$ . Годичные количества рождающихся и умирающих пропорциональны населению  $P$ , константы  $C_B$  и  $C_D$  - коэффициенты рождаемости и смертности при  $t = t_0$ . Унитарные множители описывают, соответственно, влияние факторов  $M_S$ ,  $F_R$ ,  $P_R$ , и  $Z_R$ . От материального уровня жизни рождаемость  $B$  и смертность  $D$  зависят через множители  $B_M$  и  $D_M$ , оба эти множителя убывают с ростом  $M_S$  (рис.7,8). От уровня питания рождаемость  $B$  и смертность  $D$  зависят через множители  $B_F$  и  $D_F$ , причем функция  $B_F(F_R)$  является возрастающей, а функция  $D_F(F_R)$  – убывающей (рис. 9, 10). Рост плотности населения  $P_R$  и загрязнения  $Z_R$  приводит к убыванию рождаемости (через  $B_P$  и  $B_Z$ , рис. 11, 12) и росту смертности (через  $D_P$  и  $D_Z$ , рис. 13, 14)

Дифференциальное уравнение модели для капитала имеет вид

$$\dot{V} = V_2 - V_1,$$

где  $V_2$  - прирост, а  $V_1$  - убыль капитала. Капитал производится людьми, поэтому его прирост пропорционален численности населения

$$V_2 = PC_V V_M,$$

где  $C_V$  - «нормальная» скорость генерации капиталовложений на душу населения, а  $V_M$  - унитарный множитель, характеризующий увеличение этой скорости с ростом материального уровня жизни (рис 15). Убыль капитала связана с износом и амортизацией:

$$V_1 = V / T_V,$$

причем скорость амортизации (и, соответственно, «время жизни» капитала  $T_V$ ) считается постоянным.

Дифференциальное уравнение, определяющее динамику доли сельскохозяйственного капитала имеет вид

$$\dot{S} = S_2 - S_1.$$

«Прирост» доли сельскохозяйственного капитала определяется произведением двух унитарных множителей

$$S_2 = S_F S_Q / T_S,$$

первый из которых ( $S_F$ ) определяет какую долю капитала готово общество тратить на сельское хозяйство в зависимости от существующего уровня питания (рис 16), а второй ( $S_Q$ ) определяет поправку к этой доле в зависимости от качества жизни. Точнее, эта поправка связана с соотношением «материальной» и «пищевой» компонент качества жизни ( $Q_M(M_S)$  и  $Q_F(F_R)$ ) - рис. 5, 6)

и определяется как табличная функция от отношения  $Q_M(M_S)/Q_F(F_R)$  (рис 17).

Убыль доли сельскохозяйственного капитала определяется отношением

$$S_1 = S/T_S,$$

где  $T_S$  – постоянная запаздывания между текущим значением  $S$  и желаемым в данный момент ( $S_F S_Q$ ).

Дифференциальное уравнение для ресурсов не содержит положительного слагаемого и, поскольку ресурсы тратятся людьми, то их убыль пропорциональна численности населения

$$\dot{R} = -PR_M.$$

Скорость потребления ресурсов зависит от материального уровня жизни и нелинейно растет при его увеличении (рис 18).

Последнее дифференциальное уравнение определяет динамику загрязнения

$$\dot{Z} = Z_2 - Z_1,$$

где  $Z_2 = PZ_V$ , а  $Z_1 = Z/T_Z$ . Множитель  $Z_V(V_R)$  является унитарным и описывает увеличение скорости генерации загрязнения в расчете на одного человека с ростом удельного капитала (рис. 19). Скорость природной «утилизации» загрязнения уменьшается, а время распада  $T_Z$  увеличивается с ростом количества загрязнений  $Z$  (рис 20).

Таким образом, модель Форрестера выражается пятью простыми, хотя и нелинейными уравнениями, рядом соотношений и двадцатью нелинейными зависимостями, представленными на рис 1 – 20.

## **2. Модернизация модели Форрестера для формализации задач региональной динамики**

Применение Форресторовского подхода к описанию и исследованию задач региональной динамики требует осуществления следующих модификаций исходной модели.

1. Провести существенную структуризацию модели. Каждую из глобальных переменные необходимо заменить целым классом переменных, характеризующих положение дел в данном региональном блоке. Так, вместо одного переменного для численности населения следует анализировать изменения численностей возрастных, профессиональных, социальных и других групп. Вместо одного уравнения для капитала следует рассматривать ряд уравнений, характеризующих, по крайней мере, отраслевую региональную динамику. В связи с этим, оказывается сельскохозяйственный капитал войдет в блок «экономика региона» отдельным компонентом, как и прочие отрасли. Блок ресурсы следует разбить на два подблока: невозобновляемые и возобновляемые ресурсы, учитывая при этом наиболее важные ресурсы для данного региона. Загрязнения также требуют структуризации по характеру, типам, сезонности и т. д.

2. Необходимо перейти от замкнутого варианта модели к открытому. Для этого в правые части каждого уравнения надо ввести еще по два слагаемых. Положительное, которое будет характеризовать иммиграции населения, ввоз капитала и ресурсов, перенос загрязнений и т. п., и отрицательное, описывающее эмиграцию, вывоз капитала и ресурсов, отток загрязнений и т. д.

Приведем возможные варианты уравнений. Динамика населения должна теперь описываться отдельной системой уравнений. Уравнение для некоторой  $i$ -ой группы населения будет иметь вид:

$$\dot{P}_i = B_i - D_i + I_i - E_i,$$

где  $B_i$  - характеризует процессы естественного пополнения данной группы населения за счет внутрирегионального (в первую очередь, в результате перехода в старшую возрастную группу) перетока населения из одной группы в другую, а для самой младшей возрастной группы – за счет рождаемости;  $D_i$  описывает процессы убыли из данной группы за счет внутрирегионального перетока и смертности;  $I_i$  характеризует процессы иммиграции, а  $E_i$  процессы эмиграции из данной группы. На коэффициенты пополнения и убыли, кроме рассмотренных механизмов, существенное влияние должны оказывать факторы, связанные с занятостью различных групп населения, их социальным статусом, реальным уровнем доходов и т.п. Влияние этих факторов естественно учитывать с помощью соответствующих нелинейных унитарных множителей. Определения вида этих множителей, анализ их роли и степени влияния должен составить содержательный предмет будущих исследований.

Экономика региона также описывается системой уравнений, число которых определяется числом рассматриваемых отраслей. Динамика «капитала»  $j$ -ой отрасли может описываться уравнением типа:

$$\dot{V}_j = P_{Vj} C_{Vj} V_{jM} V_{jR} - V_j / T_{Vj} + I_{Vj} - m_{Vj} V_j,$$

где  $C_{Vj}$  - «нормальная» скорость генерации капиталовложений в данной отрасли на душу населения,  $P_{Vj}$  количество людей занятых в отрасли,  $V_{jM}$  - унитарный множитель, характеризующий увеличение скорости генерации капитала с ростом материального уровня жизни работников («благополучия» отрасли), а  $V_{jR}$  - унитарный множитель, описывающий изменение скорости генерации отраслевого капитала от обеспеченности необходимыми ресурсами. Убыль капитала связана теперь не только с износом и амортизацией, но и возможностью его «вывоза» и оттока из отрасли, причем «время жизни» капитала  $T_{Vj}$  (как и скорость оттока  $m_{Vj}$ ) необходимо будет считать зависимой от перспективности развития данной отрасли в регионе. Далее, кроме внутри регионального воспроизводства капитала необходимо учесть возможность прямых инвестиций и перетекания капитала из отрасли в отрасль ( $I_{Vj}$ ). Сельское хозяйство войдет составной частью в блок экономики как одна или несколько отраслей.

Уравнение динамики для  $i$ -го невозобновляемого ресурса можно представить в виде

$$\dot{R}_i = -P_{Ri} S_{Ri} R_{Mi} R_{Vi} - m_{Ri} R_i + I_{Ri}$$

где  $S_{Rj}$  - «нормальная» скорость изъятия  $i$ -го ресурса на душу населения,  $P_{Rj}$  количество людей использующих данный ресурс,  $R_{Mi}$  - унитарный множитель, характеризующий увеличение скорости изъятия ресурса с ростом материального уровня потребителей, а  $R_{Vj}$  - унитарный множитель, описывающий изменение скорости изъятия с развитием отраслей, использующих данный ресурс. Убыль ресурса связана не только с его использованием в регионе, но его вывозом, причем скорость вывоза  $m_{Rj}$  необходимо считать зависимой от коммерческой ценности ресурса, конъюнктуры рынка и перспектив развития перерабатывающих отраслей в регионе. Естественно большинство ресурсов будут поступать в регион в результате ввоза ( $I_{Ri}$ ).

Уравнение динамики для  $j$ -го возобновляемого ресурса будет отличаться от уравнения для невозобновляемого одним положительным слагаемым, характеризующим воспроизводство

$$\dot{R}_j = C_{Rj} V_{Rj} R_j - P_{Rj} S_{Rj} R_{Mj} R_{Vj} - m_{Rj} R_j + I_{Rj}$$

где  $C_{Rj}$  - «нормальная» скорость воспроизводства на единицу имеющегося ресурса,  $V_{Rj}$  - унитарный множитель, характеризующий увеличение этой скорости при осуществлении целенаправленных мероприятий (затрат) повышающих воспроизводство.

Приведем, наконец, дифференциальное уравнение, определяющее динамику  $i$ -го компонента загрязнения

$$\dot{Z}_i = \sum_k C_{Zik} Z_{iV_k} P_{V_k} - Z_i / T_{zi} + I_{Zi}$$

Здесь  $C_{Zik}$  - «нормальная» скорость генерации  $i$ -го типа загрязнений, генерируемых  $k$ -ой отраслью экономики,  $P_{Vj}$  количество людей занятых в  $k$ -ой отрасли,  $Z_{jV_k}$  - унитарный множитель, характеризующий увеличение скорости генерации загрязнений с ростом капиталовложений в отрасли,  $I_{Zj}$  - внос загрязнений через границы региона.