

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ.

(Никуличев Ю.В., к.ф.-м.н, с.н.с., ИТПМ СОРАН, Новосибирск)

Физическая и математическая модели

Изучение любого объекта или процесса начинается с построения **физической модели** –упрощенной виртуальности, упрощенной настолько, чтобы остаться достаточно близкой по интересующим исследователя характеристикам к реальности (адекватной) и позволяющей построить как можно более простую **математическую модель** - совокупность математических соотношений, описывающих взаимосвязь объектов физической модели.

Объекты физической модели это множество величин, которые по своим свойствам подразделяются на:

- переменные состояния или фазовые переменные, (то, что получается),
- параметры модели, (то, что задаем).

Параметры это величины, которые либо остаются постоянными в процессе функционирования модели, либо изменяются по заданным законам.

Динамическая система

Динамическая система включает независимое переменное – время с заданной областью определения. Фазовые переменные динамической системы меняют свои значения с изменением времени. Динамическая система может включать в себя набор функций времени, с заданными областями определения, называемый управлениями. Управления, имеющие явную зависимость от фазовых переменных, называются управлениями с обратной связью. Понятно, что формы математических соотношений, описывающих динамическую систему, могут быть самыми различными. Мы будем рассматривать динамическую систему, заданную в нормальной форме Коши с управлениями без обратной связи.

$$\dot{y} = f(y, u(t), p, t). \quad (1)$$

Здесь:

y – вектор фазовых переменных,

f – вектор обобщенной силы, действующей на фазовые переменные,

u – вектор управления, зависящий от времени t ,

p – вектор параметров модели,

t – время, определенное в интервале $T=[t_0, t_f]$, если $t_f < \infty$, $T=[t_0, t_f)$, если $t_f = \infty$.

Если функция f не зависит явно от времени t то такая система называется консервативной и для нее мы всегда можем положить $t_0=0$.

Для принятой математической модели строго оговаривается вид функций f и область их определения – совокупность значений фазового вектора и управлений, для которых определены функции f при любом $t \in T$. Это множество мы обозначим $N \leq 0$.

Оговаривается также класс допустимых управлений. Достаточно хорошо изученных классов функций и функциональных пространств очень много и об этом может быть отдельный очень большой разговор. Это может быть класс непрерывных (C), кусочно-непрерывных (D), кусочно-линейных, кусочно-постоянных функций и т.д.

Полет реактивного снаряда на максимальную дальность.

Физическая модель:

- ракета – материальная точка;
- Земля плоская и не вращается;
- атмосфера отсутствует;
- ускорение свободного падения g постоянно;
- двигатель безынерционный, тяга реактивная и рассчитывается по формуле $P=c\beta$.

Уравнения движения реактивного снаряда в таком случае запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v, \\
\dot{y} &= w, \\
\dot{v} &= \frac{c\beta}{m} \cos \omega, \\
\dot{w} &= \frac{c\beta}{m} \sin \omega - g, \\
\dot{m} &= -\beta.
\end{aligned} \tag{0}$$

Здесь:

c – задаваемый коэффициент,

β – расход топлива,

m – масса аппарата,

ω – угол между направлением тяги и плоскостью Земли.

Граничные условия:

(0): $t_0=0, x_0=y_0=v_0=w_0=0, m_0=m_p+m_T,$

(f): $t=T_a, m_f=m_p; t_f=T=T_a+T_p, y_f=0.$

Естественные ограничения: $y \geq 0, 0 \leq \beta \leq \beta_{\max}.$

Задача: все, что в нашем распоряжении (ω, β) употребить на то, чтобы получить $x(T)=\max.$

Оптимизация.

В дальнейшем, для простоты будем говорить о минимизации, поскольку минимизация и максимизация различаются между собой только знаком искомого оптимума. Итак, для того, чтобы придать какой-то смысл динамической системе (1) вводится некая функция, минимум которой нужно найти.

Функция n переменных:

$$G(x), \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \tag{2}$$

При отсутствии каких-либо дополнительных условий это задача на безусловный минимум. Решение этой задачи должно удовлетворять необходимому условию минимума

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

и достаточному условию минимума

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} > 0, \tag{4}$$

которое означает положительную определенность матрицы (4).

Наличие условий

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{5}$$

которые должны выполняться в точке минимума создает задачу поиска условного минимума функции n переменных. Для решения этой задачи существует очень много методов, но основным и одним из первых придуманных является метод неопределенных множителей Лагранжа, суть которого (поддаться, чтобы победить) состоит во введении еще m переменных, обозначаемых обычно λ_i . Теперь неизвестных переменных стало $n+m$. Далее составляется новая минимизируемая функция (аналог функции Гамильтона)

$$H = G(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x), \tag{6}$$

к этой функции применяют необходимые условия (3) и получают $n+m$ уравнений для $n+m$ неизвестных. Придуманно несколько задач, достаточно простых, которые решаются методом неопределенных множителей Лагранжа в символьном виде – в формулах. Такие задачи называют классическими. Достаточно адекватно поставленную инженерную задачу, конечно, в символьном виде решить нельзя.

Аналогично формулируется задача поиска оптимального управления динамической системы. Разница в том, что пространство поиска здесь уже не конечномерное. Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{y} - f(y(t), p, u(t)) &= 0, \quad u(t) \in D = \left\{ u : u^{\min} \leq u(t) \leq u^{\max} \right\}; \\ y(t_0) \Rightarrow u(\tau) \Rightarrow y(t_f) &\in B = \left\{ y_i : |y_i - y_i^*| \leq \Delta_i, \quad i = \overline{1, n} \right\} \\ \psi(y, p, u) &\leq 0; \quad \varphi(t_f) = \varphi(y(t_f), p, u(t_f)) = 0; \\ G(y(t_f), t_f) &\Rightarrow \min_{u(t), t_f}, \quad t_f \in [0, T_{\max}] \end{aligned} \quad (7)$$

Иногда в число варьируемых величин включается часть компонент вектора параметров и время окончания процесса.

Принцип максимума

В зависимости от формы представления функционала различают три вида задач оптимального управления:

- задача Майера $G = \Phi(y(t_f), t_f) - \Phi(y(t_0), t_0)$,
- задача Лагранжа $G = \int_{t_0}^{t_f} F(y(t), t) dt$,
- задача Больца $G = \Phi(y(t_f), t_f) - \Phi(y(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_f} F(y(t), t) dt$.

В 1956 году в ДАНе была опубликована статья Л.С.Понтрягина, в которой впервые был опубликован принцип максимума для задачи оптимального управления, сформулированной как неклассическая задача вариационного исчисления. Здесь я кратко приведу то, что называется формализмом принципа максимума.

Вводим вспомогательную вектор-функцию ψ как решение следующей системы уравнений (сопряженная система уравнений – уравнения Эйлера-Лагранжа):

$$\dot{\psi}_k = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \psi_i. \quad (8)$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$H(f, y, u) = \sum_{i=1}^n f_i \psi_i. \quad (9)$$

(функцию Гамильтона.).

Принцип максимума утверждает, что для того, чтобы функции управления и функции фазовых переменных доставляли сильный минимум функционалу в задаче Майера необходимо существование совершенно ненулевого непрерывного вектора ψ , определенного системой уравнений (8), при котором функция Гамильтона (9) достигает максимума по u и выполняется условие трансверсальности

$$[\delta G - H \delta t + \psi \cdot \delta y]_0^f = 0. \quad (10)$$

Замечание: сильный минимум, если множество кривых y принадлежит классу D_1 кусочно-гладких функций; слабый – классу C_1 гладких функций.

Вернемся к задаче (0). Сопряженная система:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, \\ \dot{\psi}_3 &= -\psi_1, \\ \dot{\psi}_4 &= -\psi_2, \\ \dot{\psi}_5 &= \frac{c\beta}{m^2} k_{\omega}. \end{aligned} \quad (11)$$

Функция Гамильтона:

$$H = v\psi_1 + w\psi_2 - g\psi_4 + k_\beta \beta \quad (12)$$

Здесь мы обозначили

$$k_\beta = \frac{ck_\omega}{m} - \psi_5, \quad k_\omega = \psi_3 \cos \omega + \psi_4 \sin \omega. \quad (13)$$

Первый интеграл, согласно условию transversальности (10) находится из условия

$$H = C = \text{const.}$$

Условие слабого минимума

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = \frac{c\beta}{m} [\psi_4 \cos \omega - \psi_3 \sin \omega] = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \omega^2} (\delta \omega)^2 = -\frac{c\beta}{m} k_\omega (\delta \omega)^2 \leq 0. \quad (14)$$

Условие transversальности дает

$$\psi_1(T) = 1, \quad C = 0, \quad \psi_3(T) = 0, \quad \psi_4(T) = 0. \quad (15)$$

Отсюда и из первых 4-х уравнений (11) следует

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_2 = C_2, \quad \psi_3 = T - t, \quad \psi_4 = C_2(T - t). \quad (16)$$

Из (14) находим программу изменения направления тяги.

$$\tan \omega = \frac{\psi_4}{\psi_3} = C_2, \quad \cos \omega = \frac{\psi_3}{k_\omega}, \quad \sin \omega = \frac{\psi_4}{k_\omega}. \quad (17)$$

Условие максимума H по β определяет программу изменения расхода топлива. Она включает в себя две дуги экстремали:

$$\begin{cases} \beta = \beta_{\max} & \text{при } k_\beta > 0, \\ \beta = 0 & \text{при } k_\beta < 0, \\ \tan \omega = C_2 & \text{при } k_\omega = \sqrt{\psi_3^2 + \psi_4^2}. \end{cases} \quad (18)$$

Итак, k_β и k_ω играют роль функций переключения управлений β и ω .

Поскольку

$$\dot{k}_\beta = \frac{c}{m} \dot{k}_\omega, \quad (19)$$

из формул (16) следует

$$\dot{k}_\beta = -\frac{c}{m} \sqrt{1 + C_2^2}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что k_β есть монотонная убывающая функция при любом β и закон (18) может иметь только одну точку переключения.

Уравнение (20) легко интегрируется. Имеем:

$$\begin{aligned} k_\beta &= \frac{c}{\beta_{\max}} \sqrt{1 + C_2^2} \ln \frac{m_0 - \beta_{\max} t}{m_0 - \beta_{\max} t_a}, \quad t \in [0, t_a], \\ k_\beta &= \frac{c}{m_p} \sqrt{1 + C_2^2} (t_a - t), \quad t \in [t_a, T]. \\ t_a &\rightarrow k_\beta = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Учитывая условия на правом конце, и первый интеграл, находим

$$\begin{aligned} y(t_a) + w(t_a)(T - t_a) - \frac{g(T - t_a)^2}{2} &= 0, \\ v(t_a) + C_2[w(t_a) - g(T - t_a)] &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) рассчитываем C_2 и T .

Вторая функция переключения, согласно (18),

$$k_\omega = (T - t) \sqrt{1 + C_2^2}. \quad (23)$$

Из (23) видно, что k_ω линейна по t и не имеет точек переключения.

Итог приведенных рассуждений, следующий.

Направление вектора тяги во все время полета постоянно. Величина тяги должна быть постоянной, равной своей максимальной величине. Величина времени работы двигателей до полного выгорания топлива t_a определяется из пятого уравнения системы (0)

$$t_a = \frac{m_T}{\beta_{\max}}. \quad (24)$$

При постоянной тяге и постоянном угле вектора тяги к горизонту уравнения (0) разрешаются в элементарных функциях как уравнения активного полета:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c}{\sqrt{1+tg^2\omega}} \left[t + \left(\frac{m_0}{\beta_{\max}} - t \right) \ln \left(1 - \frac{\beta_{\max}t}{m_0} \right) \right] + v_0t + x_0, \\ v(t) &= v_0 + \frac{c}{\sqrt{1+tg^2\omega}} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \beta_{\max}t} \right), \\ y(t) &= \frac{cs}{\sqrt{1+tg^2\omega}} \left[t + \left(\frac{m_0}{\beta_{\max}} - t \right) \ln \left(1 - \frac{\beta_{\max}t}{m_0} \right) \right] + w_0t + y_0 - \frac{gt^2}{2}, \\ w(t) &= w_0 - gt + \frac{cs}{\sqrt{1+tg^2\omega}} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \beta_{\max}t} \right), \quad m(t) = m_0 - \beta_{\max}t. \end{aligned} \quad (25)$$

При нулевой тяге уравнения (0) разрешаются в элементарных функциях как уравнения свободного движения:

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= 0, \quad v(t) = v_0, \quad x(t) = x_0 + v_0t, \\ \dot{w}(t) &= -g, \quad w(t) = w_0 - gt, \quad y(t) = y_0 + w_0t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Угол вектора тяги к горизонту, как показано, постоянен и тангенс этого угла выражается формулой

$$tg\omega = \frac{v(t_a)}{\sqrt{w^2(t_a) + 2gy(t_a)}}, \quad (27)$$

где величины в конце активного участка рассчитываются из (25).

Пример: реактивный снаряд массой 40 килограмм, включая 20 килограммов топлива на борту с тягой 600 ньютон и скоростью истечения газов 1000 м/сек улетает на максимальную дальность 29551 метров, при этом угол наклона вектора тяги к горизонту равен 52 градуса, 42 минуты, горизонтальная скорость в точке приземления равна 420.4 м/сек, вертикальная равна -320.7 м/сек, время работы двигателей 33.3 сек., время свободного падения 55.5 сек.

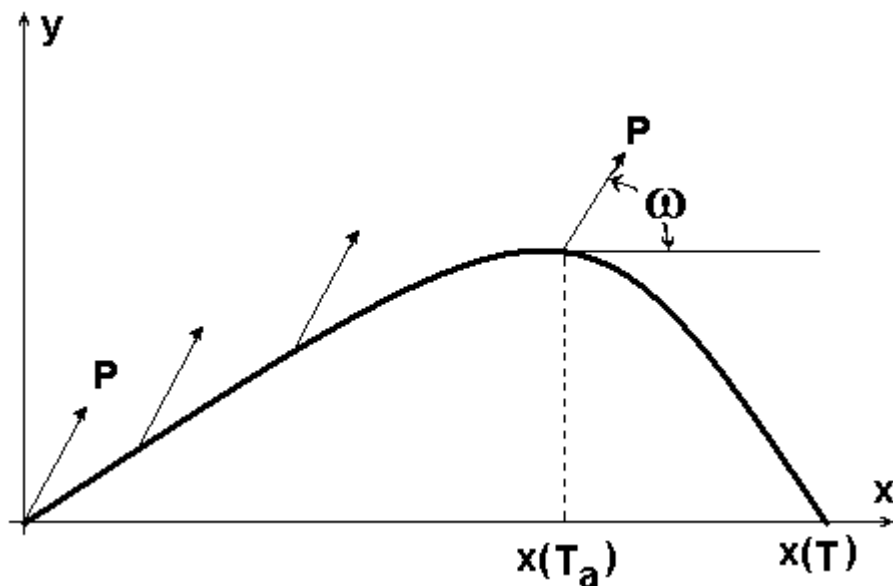


Рис. 0

Проблема Годдарда.

Следующая задача, решенная также в символьных выражениях с помощью принципа максимума так же, как и предыдущая, характерна тем, что управление входит в правые части системы уравнений движения линейно. Однако в предыдущей задаче функция переключения k_β не обращалась в нуль. При обращении функции переключения в нуль возникает участок так называемого особого управления. Для определения оптимального управления в этом случае необходим дополнительный анализ с привлечением теоремы Пуассона – предмет дополнительной лекции.

Рассматриваемая ниже задача была предложена отцом американской космонавтики Робертом Годдардом в 1919 году и впервые достаточно полно решена советским ученым Д.Е. Охотимским в 1946 году. Эта задача ставится следующим образом. Найти такой режим работы двигателя для вертикально взлетающей ракеты, который бы обеспечил достижение ею максимальной высоты. Тяга ракеты ограничена сверху.

Физическая модель.

- ракета – материальная точка;
- Земля плоская и не вращается;
- сопротивление атмосферы пропорционально квадрату скорости ракеты с заданным коэффициентом;
- силы по оси абсцисс (боковые) отсутствуют;
- ускорение свободного падения g постоянно;
- двигатель безынерционный, тяга реактивная и рассчитывается по формуле $P=c\beta$.

Математическая модель движения центра масс вертикально взлетающей ракеты:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= w, \\ \dot{w} &= \frac{P - bw^2}{m} - g, \\ \dot{m} &= -\frac{P}{c}. \end{aligned} \quad (28)$$

t - время (сек.),

y - высота центра масс ракеты (м.),

w - вертикальная скорость центра масс ракеты (м./сек.),

P - тяга двигателя ракеты (н.),

P_{max} - максимальная тяга двигателя ракеты,

g - ускорение свободного падения (здесь 9.81 м./сек./сек.),

m - масса ракеты (кг.),

c - скорость истечения газов из сопла двигателя ракеты (м./сек.).

Обезразмерим исходную систему уравнений движения посредством следующих констант:

- ускорение свободного падения,
- секундный расход массы топлива,
- скорость истечения газов из сопла двигателя.

Уравнения движения (28) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= \frac{u(t) - by_2^2}{y_3} - 1, \\ \dot{y}_3 &= -u(t).\end{aligned}\tag{29}$$

Краевые условия задачи:

$$\begin{aligned}\tau = 0: y_1 &= 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1, \\ \tau = T: y_1 &= \max, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = m_p.\end{aligned}$$

Наша задача найти функцию $u(\tau)$ такую, при которой ракета улетит на максимальную высоту.

РЕШЕНИЕ

Управляющая функция (Рис.1) имеет две точки переключения и, следовательно, состоит из трех участков непрерывного управления.

Первый участок: тяга постоянна и равна максимальной величине. Этот участок продолжается до тех пор, пока величина массы ракеты удовлетворяет неравенству

$$y_3 > m_1 = by_2^2(1 + y_2).\tag{30}$$

Второй участок: в момент времени $\tau = \tau_1$, при котором масса ракеты y_3 становится равной m_1 , происходит переключение тяги. Теперь до момента времени τ_2 , в который все топливо ракеты сгорит и масса ракеты будет равна величине m_p , тяга двигателя ракеты изменяется по следующему закону:

$$u(t) = \frac{By_2(2 + 3y_2)(By_2^2 + y_3)}{[By_2(2 + 3y_2) + y_3]}.\tag{31}$$

Третий участок: топливо кончилось, тяга равна нулю $u=0$. В этом случае уравнения свободного движения разрешаются в элементарных функциях, и приращение высоты на пассивном участке выражается следующим соотношением

$$\begin{aligned}\delta y_1 &= \frac{s_1}{s_2} \ln \left| \frac{s_1}{\sqrt{1 + s^2[y_1(\tau_2)]^2}} \right| + \frac{y_1(\tau_2) \cdot (s-1)}{s_2} \operatorname{Arctg}[s \cdot y_1(\tau_2)], \\ s &= \sqrt{\frac{B}{\mu}}, \quad s_1 = 1 + s \cdot [y_1(\tau_2)]^2, \quad s_2 = \frac{B \cdot (1 + [y_1(\tau_2)]^2)}{\mu}.\end{aligned}\tag{32}$$

Конкретный пример:

$$m_0 = 120 \text{ кг}, \quad m_p = 24 \text{ кг}, \quad P_{\max} = 1412.6 \text{ н}, \quad b = 0.003072 \text{ кг/м}.$$

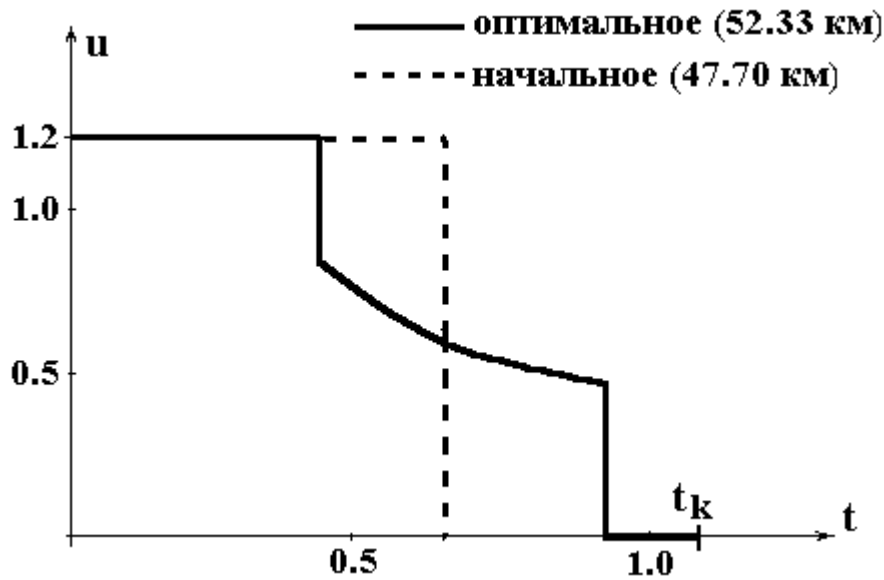


Рис.1.

Задача нелинейного программирования.

Задача нелинейного программирования формулируется следующим образом:

- задано n переменных, обозначаемых x_i вместе со своими границами, внутри которых они могут изменяться;
- задана некоторая функция от этих переменных, $F(x_1, \dots, x_n)$, называемая функционалом, поскольку при заданных значениях переменных это число.

Задача состоит в том, чтобы найти значения переменных, при которых значение функционала минимально и при этом выполняются некоторые функциональные соотношения в виде равенств и/или неравенств.

$$\varphi_i(x) = 0, \quad \psi_j(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad p + q = m. \quad \Psi_j(x) = [\psi_j(x) + |\psi_j(x)|]$$

Таким образом, задачу нелинейного программирования можно сформулировать коротко так:

$$F_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad F_{m+1} = \min.$$

Метод Ньютона.

Итак, в задаче нелинейного программирования мы имеем n переменных и m функций-ограничений.

Переходим в m -мерное многообразие посредством замены:

$$x_i = x_{i0} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i} s_j.$$

Вариация функционала по переменным:

$$\delta F_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \delta x_i = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right) s_k.$$

Идея Ньютона состоит в том, чтобы положить

$$\delta F_j = -F_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Теперь мы имеем систему m линейных алгебраических уравнений для определения m неизвестных $s_j, j = 1, 2, \dots, m$.

Надо, однако, помнить, что за одно решение этой системы мы вряд ли получим искомое значение переменных, - мы получим некоторое улучшение решения, которое нужно продолжать до тех пор, пока ограничения-равенства не начнут выполняться с заданной точностью. То есть метод Ньютона это алгоритм итерационного процесса, и в итерационных процессах всегда возникают вопросы, связанные с устойчивостью и сходимостью.

Прямые методы. Метод проектированного градиента

Применяются так называемые прямые методы. Варьируются управления, представляющиеся параметрически и задача переводится в конечномерную (дискретизация). Далее решается задача нелинейного программирования в пространстве конечного числа переменных.

Один из прямых методов - метод проектированного градиента, схема построения которого следующая.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \quad t \in [t_0, t_k], \\ x(t_0) &= x_0, \quad F_j(x(t_k)) = 0, \quad j = \overline{1, P-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Дифференциал Гато $\delta u_j = \sum_{i=1}^P \mu_i G_{ij}(t)$

G_{ij} – функция – вариация j -го управления, доставляющая максимальное изменение i -му функционалу. Показано, что

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} \frac{\partial f_k}{\partial u_j},$$

Где функции λ определяются как решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\lambda_{ir}}{d\xi} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_r} \lambda_{ij}, \quad \lambda_{ir}(t_k) = \frac{\partial F_i}{\partial x_r}, \quad \xi \in [t_k, t_0], \quad i = \overline{1, P}, \quad r = \overline{1, n}. \quad (34)$$

Итак, для вариаций функционалов по параметрам имеем:

$$\frac{\delta F_i}{\delta \mu_r} = \psi_{ir}, \quad \psi_{ir} = - \sum_{j=1}^m G_{ij}(t) G_{rj}(t), \quad \psi_{ir}(t_k) = 0, \quad i, r = \overline{1, P}.$$

В методе Ньютона решения алгебраического уравнения вариация переменной находится из условия быстрого уменьшения функции, представляющей решаемое уравнение. Для i -го приближения к значению переменной используется формула

$$f(x) = 0. \quad \delta f = f' \delta x = f' \cdot (x^i - x^{i-1}) = -f(x^{i-1}). \Rightarrow x^i = x^{i-1} - \frac{f(x^{i-1})}{f'(x^{i-1})}.$$

В методе проектированного градиента используется аналогичная идея, реализующаяся в функциональном пространстве. Рисунки, приводимые ниже, иллюстрируют идею метода.

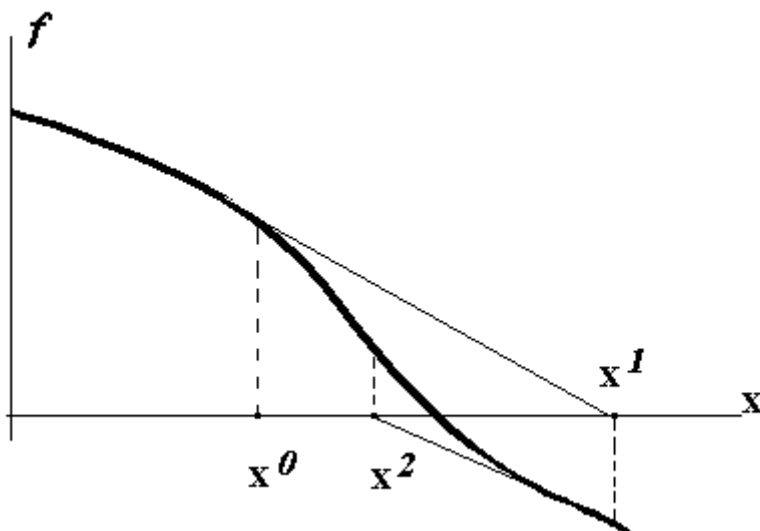


Рис. 2.

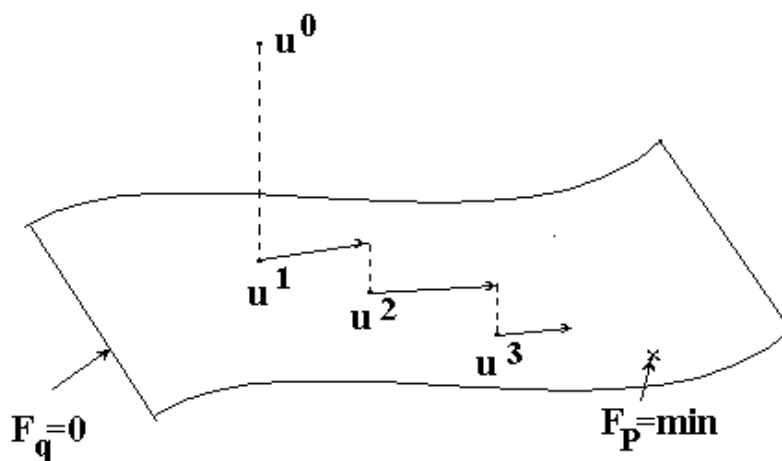


Рис. 3.

Запуск 2-й ступени АКС на заданную орбиту

Идея АКС – Аэрокосмического самолета возникла в 60-х годах и продолжает разрабатываться с различными темпами и по сей день. Основная идея аппарата, стартующего с Земли, заходящего на орбиту и совершающего посадку на Землю, пока не реализована. Для реализации этой идеи необходимо решить огромный комплекс задач. Двухступенчатый АКС как первая часть задачи сейчас реализован системами Space shuttle и “Буран”. Опишем управляемую динамическую систему запуска 2-й ступени АКС на низкую околоземную орбиту.

Физическая модель

- Земля круглая,
- атмосфера отсутствует,

- двигатель – безинерционный ЖРД,
- внешние силы – только гравитационное притяжение Земли,
- система координат связанная (ось y проходит через центр масс АКС и центр Земли),
- боковые силы отсутствуют (плоское движение).

Математическая модель

Уравнения движения в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \frac{u_2(y_1 \cos u_1 - y_2 \sin u_1)}{(1 - y_4)\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \\ \dot{y}_2 &= \frac{u_2(y_1 \sin u_1 + y_2 \cos u_1)}{(1 - y_4)\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + \frac{y_1^2}{1 + y_3} - \frac{1}{(1 + y_3)^2}, \\ \dot{y}_3 &= y_2, \\ \dot{y}_4 &= -\frac{u_2}{I}.\end{aligned}\tag{33}$$

Здесь (безразмерно) y_1, y_2 – компоненты скорости, y_3 – высота, y_4 – масса, I – удельный импульс двигателя.

Граничные условия:

$$\begin{aligned}t = 0: \quad y_1 &= a \cos S; \quad y_2 = a \sin S; \quad y_3 = b; \quad y_4 = 1; \\ t = t_k: \quad F_1 &= y_1 - c = 0; \quad F_2 = y_2 = 0, \quad F_3 = y_3 - d = 0. \quad F_4 = y_4 = \max, \\ a &= \frac{a_0 M}{\sqrt{R_3 g_0}}, \quad b = \frac{h_0}{R_3}, \quad c = \sqrt{\frac{R_3}{R_3 - h_k}}, \quad d = \frac{h_k}{R_3}.\end{aligned}\tag{34}$$

Здесь: a_0 – скорость звука у поверхности Земли,

M – число Маха в момент пуска (скорость в момент пуска),

R_3 – радиус Земли,

g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли,

h_0 – высота пуска,

h_k – высота орбиты.

Данная модель являлась частью общей модели, включавшей расчет траектории первой ступени, расчет траектории второй ступени, расчет спуска второй ступени АКС на поверхность Земли. Задача общей модели состояла в том, чтобы ответить на вопросы о возможности запустить на орбиту достаточное количество полезного груза и топлива, необходимого для спуска 2-й ступени на Землю. Цикл расчетов с приведенной моделью ответил на вопросы о минимальной высоте запуска, о скорости и направлении запуска, о возможности запустить на орбиту достаточное количество полезного груза и топлива для спуска на Землю.

Решение задачи запуска 2-й ступени АКС на орбиту

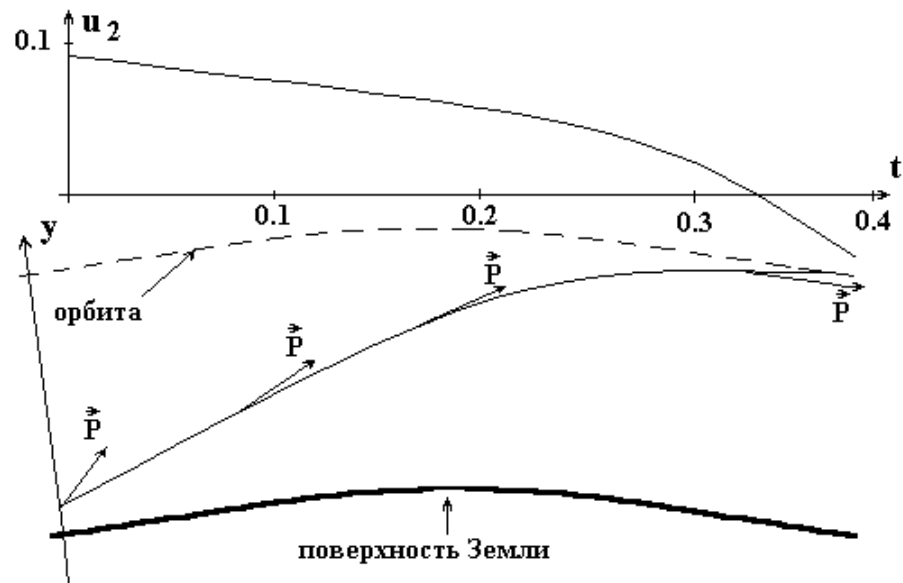
Принцип максимума в данном случае применить не удалось ввиду сложной структуры многих данных: получающиеся соотношения очень громоздки и не позволяли делать какие-то символьные преобразования, а систем типа Maple в то время, время БЭСМ-6 не было.

На рисунке 3 схематически показан процесс поиска оптимального управления методом проектированного градиента, которым была решена задача запуска 2-й ступени АКС на заданную околоземную орбиту. Было показано отсутствие особого участка управления для данной задачи (тяга на всем участке запуска максимальна).

На рис.4 показана траектория и управление запуском с начальной высоты 30 км. на 200 километровую орбиту с $M=10$, $S=0.31$. При этом было получено $y_4(t_k)=0.727$.

Еще один метод, придуманный и успешно опробованный нами на задаче изменения наклона орбиты ИСЗ на заданную величину. Способ изменения так же придуман нами. Он состоял в погружении ИСЗ в плотные слои атмосферы и изменения наклона с

помощью аэродинамических сил. Идея состоит в том, чтобы задавать траекторию полета, а управляющие функции определять символьными выражениями из уравнений движения. Обычная процедура, как вы поняли, состоит в обратном: задаются функции управления и



траектория движения определяется интегрированием уравнений движения. Если уравнения движения (как, например, в рассмотренной задаче о полете реактивного снаряда) позволяют определить управления через фазовые переменные, то выгода такого метода очевидна, поскольку обычно форма траектории движения примерно известна и задана в конечных точках, а форма кривых управлений не часто совершенно не очевидна.

Рис.4.

Оптимальное управление в динамике генных сетей

Генная сеть (ГС)- группа генов, связанных между собой регуляторными связями и ответственных за выполнение определенной функции организма. В состав сети входят сигнальные молекулы, осуществляющие переключение функции ГС в ответ на внешние воздействия; различные метаболиты и пр. Нормальное функционирование ГС обеспечивается согласованным взаимодействием всех ее звеньев и в пространстве и во времени, а также ее способностью адекватно воспринимать и перерабатывать внешние сигналы. В практической медицине лечение болезни, т.е. коррекция нарушения функционирования определенной ГС, чаще всего происходит фармакологическим способом. Однако воздействия, обеспечивающие нормализацию функции ГС по ее критической переменной, могут вызывать существенные отклонения от нормы по другим переменным, то есть обладать нежелательными побочными эффектами. Коррекция нарушения функционирования ГС может быть признана допустимой только в том случае, если посредством ее удастся не только восстановить основную функцию ГС, но и минимизировать побочные эффекты. Следовательно, задача фармакологической коррекции функционирования ГС является задачей оптимального управления. Часто ГС должна стабилизировать некоторые показатели, т.е. оставаться в состоянии равновесия (точке покоя). В этом случае необходимо выяснить существует ли в «мутантной» системе (патологическом варианте ГС) стационарное состояние, соответствующее норме или близкое к ней, и найти допустимое управление (фармакологическое воздействие), переводящее поврежденную ГС в состояние нормы или близкое к ней.

Математическая модель генной сети описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для векторной функции $\vec{w}(t) \in \Omega$ с числом компонент n , описывающей состояние ГС во времени t . Ω – пространство состояний.

Множество параметров системы ОДУ (вектор $\vec{\alpha}$), определяют взаимодействия элементов системы между собой и с внешней средой: синтез и разрушение элементов, интенсивности введения некоторых компонент из внешней среды или их выведения во внешнюю среду.

Пусть некоторые значения $\vec{\alpha}^*$ соответствуют равновесному состоянию ГС. Это означает, что существует хотя бы одно нетривиальное решение $\vec{w}^*$ среди положительных величин w_i , $i = \overline{1, n}$, обеспечивающее выполнение условия $d\vec{w}/dt = 0$. Это состояние будем считать нормальным и решение назовем базовым.

Компоненты нормированного вектора $\vec{\alpha}$ разбиваются на три группы:

- (1) α_k , $k \in K$ – множество номеров параметров, задающих состояние ГС при мутациях;
- (2) α_l , $l \in L$ – множество номеров параметров, используемых как управления; далее эти параметры обозначены через $\vec{u}(t)$ – вектор-функция размерности L , компоненты которой являются кусочно-непрерывными функциями;
- (3) α_m , $m \in M$ – множество номеров остальных параметров, остающихся без изменений, т.е. $\alpha_m = 1$.

Задачу оптимального управления генной сетью с использованием введенных обозначений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\vec{w}} &= \vec{\varphi}(\vec{w}(\tau), \vec{\lambda}, \vec{u}(\tau)), \\ \vec{w}(\tau_0) \Rightarrow \vec{u}(\tau) \Rightarrow \vec{w}(\tau_k) &\in B = \{w_i : |w_i - 1| \leq \Delta_i, i = \overline{1, n}\}, \\ \psi_l(\vec{w}, \vec{\lambda}, \vec{u}) &\leq 0, l \in L; \vec{\varphi}(\tau_k) = \vec{\varphi}(\vec{w}(\tau_k), \vec{\lambda}, \vec{u}(\tau_k)) = 0; \\ \vec{\lambda} &= \alpha_k \cup \alpha_m; u_j(\tau) \in D = \left\{ \vec{u} : \vec{u}^{min} \leq \vec{u}(\tau) \leq \vec{u}^{max} \right\}, j \in J; \\ F(\vec{w}(\tau_k), \tau_k) &\Rightarrow \min_{\vec{u}(\tau), \tau_k}, \tau_k \in [0, T_{max}] \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь дополнительно введено множество D , задающее область допустимых значений управлений. Поскольку уравнения нормированы, $\vec{w} = 1$ – базовая точка.

Управление генной сетью биосинтеза холестерина в клетке.

Математическая модель представляют собой систему из 10 обыкновенных дифференциальных уравнений (35), описывающих функционирование генной сети, объединенной с рядом выражений, использующихся для имитации внешних воздействий. Модель включает в рассмотрение 22 биохимических реакции, 39 констант реакций (вектор $\vec{a}$) и 10 динамических переменных (вектор-функция $\vec{w}$) – концентрации веществ.

На переходный процесс при реализации полученного состояния из начального мутантного состояния наложены функциональные ограничения: $w_3'(\tau) \geq 0$; $w_4'(\tau) \leq 0$.

Задача состояла в поиске таких фармакологических воздействий $\vec{u}(\tau)$, которые переводят систему из начального состояния патологии $\vec{w}(\tau_0)$ в конечное состояние $\vec{w}(\tau_k)$, близкое в заданной мере к норме, и поддерживают ее там неопределенно долгое время. Степень близости по переменным состояния определялась интервалом $\pm 20\%$ (множество B) относительно исходных стационарных значений в норме $\vec{w}^* = 1$.

Мутация в генной сети задана значениями параметров $a_3 = 0.1$, $a_7 = 0.01$.

Задача решалась в два этапа. Вначале находятся управления (значения констант, выбранных как управления), в конечный момент времени при которых стационарные состояния входят в заданную область B .

Заданы: значения параметров $\bar{\alpha}_k$ из множества K ; окрестность B базовой точки $\bar{w}=1$; область D допустимых значений управлений $\bar{u}$; точность ε_0 выполнения условий стационарности в совокупности; функционал $F(\bar{w}, \bar{u}) = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i^2(\bar{w}, \bar{\lambda}, \bar{u})$.

Требуется найти такие $\tilde{w}, \tilde{u}$, что $F(\tilde{w}, \tilde{u}) = \min_{\bar{w} \in B, \bar{u} \in D} F(\bar{w}, \bar{u}) \leq \varepsilon_0$.

2-й этап состоял в поиске управлений «закрепленных» в конечной точке, при которых удовлетворяются функциональные неравенства и минимизируется конечное время процесса восстановления. Для управлений был выбран класс непрерывных кусочно-линейных функций. Поиск организован итерационно, 0-я итерация – постоянное управление, следующая итерация – линейное управление, каждая новая итерация – добавление точки разрыва производной.

В Табл. 1 приведены результаты решения задачи, (w_i^* – размерные базовые значения переменных состояния [молекул/клетка], $w_i(0)$ – нормированные значения переменных в мутантном состоянии, $w_i(\tau_k)$ – решение, $u_j(\tau_k)$ – управление.

На рисунках Fig.1–4 представлены функции $w_1(\tau), w_3(\tau), w_4(\tau), w_5(\tau)$ для 2-х случаев: 1) управления постоянны $u_j(\tau) = u_j(\tau_k) = \text{const}, j = \overline{1,8}$ (пунктир); 2) кусочно-линейные управления (сплошные кривые).

Таблица 1.

	w_i^*	$w_i(0)$	$w_i(\tau_k)$	$u_j(\tau_k)$
1	$0.5821084999 \cdot 10^{-2}$	1.5016989	0.8006046	119.98
2	$0.5495681053 \cdot 10^{-4}$	1.4614053	1.1999876	0.0195
3	$0.3370067540 \cdot 10^{-6}$	0.6659124	1.0741652	1.0014
4	$0.7118757840 \cdot 10^{-4}$	1.4614053	1.1997881	0.9849
5	$0.2238008150 \cdot 10^{-6}$	52.9910866	1.1904768	1.4831
6	0.5937566109	1.5016989	0.9169163	1.4829
7	$0.3999999762 \cdot 10^{-6}$	1.0000000	0.9849196	0.8731
8	$0.1014834695 \cdot 10^{-5}$	1.0073277	1.0004238	1.1005
9	$0.9851653055 \cdot 10^{-4}$	0.9924516	1.0024357	
10	$0.1693993288 \cdot 10^{-6}$	0.6940581	0.9691837	

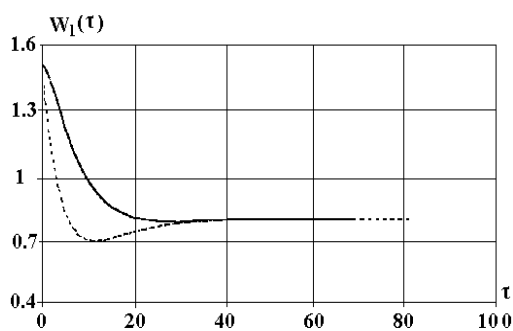


Fig. 1

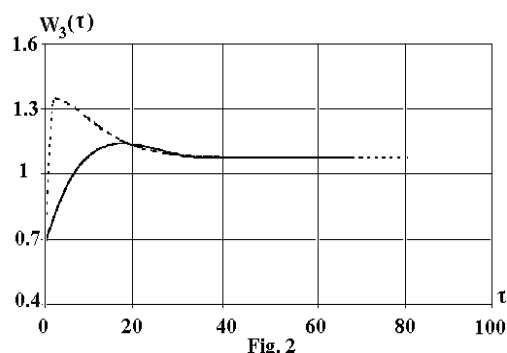


Fig. 2

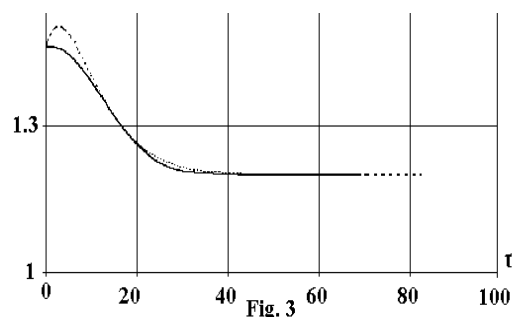


Fig. 3

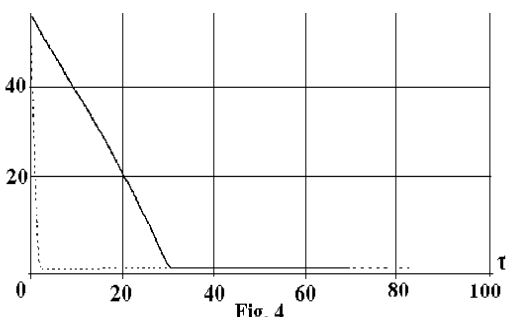


Fig. 4