

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ.

(Никуличев Ю.В. к.ф.-м.н., с.н.с. ИТПМ СОРАН, Новосибирск)



Физическая и математическая модели

Изучение любого объекта или процесса начинается с построения
физической модели

– виртуальности упрощенной, но достаточно близкой
по интересующим исследователя характеристикам к реальности
и позволяющей построить как можно более простую

математическую модель

- совокупность математических соотношений,
описывающих взаимосвязь объектов физической модели.

Объекты физической модели это множество величин,
которые по своим свойствам подразделяются на:

- переменные состояния или фазовые переменные, (то, что получается),
- параметры модели, (то, что задаем).

Параметры это величины, которые либо остаются постоянными
в процессе функционирования модели, либо изменяются по заданным законам.

Динамическая система.

Фазовые переменные динамической системы являются функциями независимой переменной - времени.

Динамическая система может включать в себя набор функций времени, называющихся **управлениями**.

Мы рассматриваем динамическую систему, заданную в нормальной форме Коши с управлениями без обратной связи.

$$\dot{y} = f(y, u(t), p, t). \quad (1)$$

y - вектор фазовых переменных;

f - вектор обобщенной силы;

u - вектор управлений;

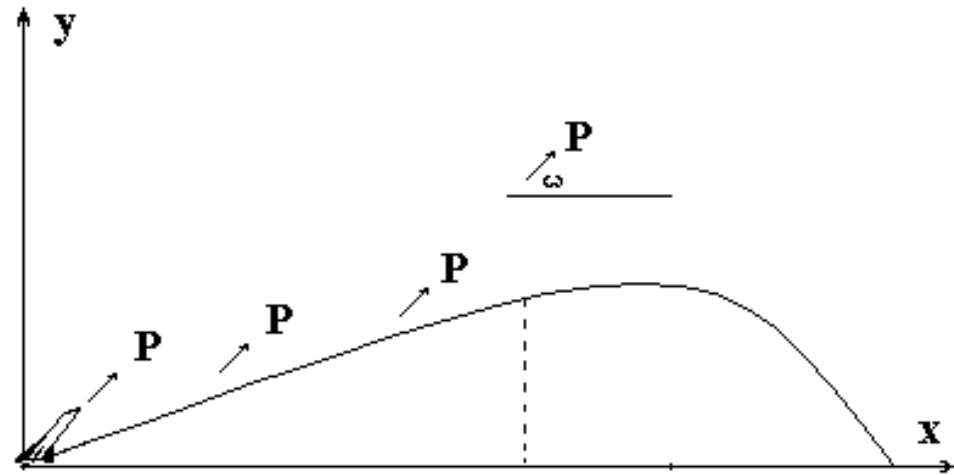
p - параметры модели;

t - независимое переменное - время $t \in T, T = [t_0, t_f]$.

Полет реактивного снаряда на максимальную дальность.

Физическая модель:

- ракета – материальная точка;
- Земля плоская и не вращается;
- атмосфера отсутствует;
- ускорение свободного падения g постоянно;
- двигатель безынерционный, тяга реактивная,
формула для тяги $P=c\beta$.



Математическая модель

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{y} &= w, \\ \dot{v} &= \frac{c\beta}{m} \cos\omega, \\ \dot{w} &= \frac{c\beta}{m} \sin\omega - g, \\ \dot{m} &= -\beta.\end{aligned}\tag{0}$$

c - задаваемый коэффициент;

β - расход топлива;

m - масса РС;

ω - угол между направлением тяги двигателей и плоскостью Земли.

Краевые условия:

$$(0): t_0 = 0, \quad x_0 = y_0 = v_0 = w_0 = 0, \quad m_0 = m_p + m_T;$$

$$(f): t = T_a, \quad m_f = m_p; \quad t_f = T_a + T_p, \quad y_f = 0,$$

Естественные ограничения: $y \geq 0, \quad 0 \geq \beta \geq \beta_{\max}.$

Оптимизация

Безусловная оптимизация:

$$\text{Min } G(x), \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \quad (2)$$

Необходимое условие минимума: $\frac{\partial G}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$

Достаточное условие минимума: $\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$

Условная оптимизация:

$$\text{Min } G(x), \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad f_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Метод неопределенных множителей Лагранжа: вводится вектор

$\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$. И составляется функция (Гамильтона)

$$H = G(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x). \quad (6)$$

Векторы λ и x определяются из n необходимых условий для (6) и m условий (5)

Оптимизация динамической системы

Математическая постановка задачи:

$$\begin{aligned} \dot{y} - f(y(t), p, u(t)) &= 0, \quad u(t) \in D = \left\{ u : u^{\min} \leq u(t) \leq u^{\max} \right\}; \\ y(t_0) \Rightarrow u(\tau) \Rightarrow y(t_f) &\in B = \left\{ y_i : \left| y_i - y_i^* \right| \leq \Delta_i, \quad i = \overline{1, n} \right\}; \\ \psi(y, p, u) &\leq 0; \quad \varphi(t_f) = \varphi(y(t_f), p, u(t_f)) = 0; \\ G(y(t_f), t_f) &\Rightarrow \min_{u(t), t_f}, \quad t_f \in [0, T_{\max}] \end{aligned} \tag{7}$$

Задача Майера: $G = \Phi(y(t_f), t_f) - \Phi(y(t_0), t_0)$

Задача Лагранжа: $G = \int_{t_0}^{t_f} F(y(t), t) dt$

Задача Больца: $G = \Phi(y(t_f), t_f) - \Phi(y(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_f} F(y(t), t) dt$

Принцип максимума

Сопряженная система уравнений – уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\dot{\psi}_k = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \psi_i. \quad (8)$$

Функция Гамильтона:

$$H(f, y, u) = \sum_{i=1}^n f_i \psi_i. \quad (9)$$

Принцип максимума утверждает: Для того, чтобы кривая y^*, u^* доставляла сильный минимум функционалу в задаче Майера необходимо существование совершенно ненулевого непрерывного вектора ψ , определяемого уравнениями (8), при котором:

- 1) Функция H (9) достигает максимума по u ;
- 2) выполняется условие трансверсальности

$$[\delta G - H \delta t + \psi \cdot \delta y]_0^f = 0 \quad (10)$$

Решение задачи полета РС на максимальную дальность

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, \\ \dot{\psi}_3 &= -\psi_1, \\ \dot{\psi}_4 &= -\psi_2, \\ \dot{\psi}_5 &= \frac{c\beta}{m^2} k_\omega.\end{aligned}\tag{11}$$

Функция Гамильтона:

$$H = v\psi_1 + w\psi_2 - g\psi_4 + k_\beta \beta.\tag{12}$$

Функции переключения:

$$k_\beta = \frac{ck_\omega}{m} - \psi_5, \quad k_\omega = \psi_3 \cos \omega + \psi_4 \sin \omega.\tag{13}$$

Первый интеграл: $H=C=const.$

Условие слабого минимума:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = \frac{c\beta}{m} [\psi_4 \cos \omega - \psi_3 \sin \omega] = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \omega^2} (\delta \omega)^2 = -\frac{c\beta}{m} k_\omega (\delta \omega)^2 \leq 0 \quad (14)$$

Условие трансверсальности:

$$\psi_1(T) = 1, \quad C = 0, \quad \psi_3(T) = 0, \quad \psi_4(T) = 0. \quad (15)$$

Отсюда и из первых 4-х уравнений (11) следует:

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_2 = C_2, \quad \psi_3 = T - t, \quad \psi_4 = C_2(T - t).$$

Из (14) находим программу изменения направления тяги:

$$tg \omega = \frac{\psi_4}{\psi_3} = C_2, \quad \cos \omega = \frac{\psi_3}{k_\omega}, \quad \sin \omega = \frac{\psi_4}{k_\omega}. \quad (16)$$

Условие максимума Н по β определяет программу изменения расхода топлива - две дуги экстремали:

$$\begin{cases} \beta = \beta_{\max} & \text{при } k_{\beta} > 0, \\ \beta = 0 & \text{при } k_{\beta} < 0, \\ \operatorname{tg} \omega = C_2 & \text{при } k_{\omega} = \sqrt{\psi_3^2 + \psi_4^2}. \end{cases} \quad (18)$$

Поскольку

$$\dot{k}_{\beta} = \frac{c}{m} \dot{k}_{\omega}, \quad (19)$$

Из формул (16) следует:

$$\dot{k}_{\beta} = -\frac{c}{m} \sqrt{1 + C_2^2}. \quad (20)$$

Интегрирование (20) дает:

$$\begin{aligned}
 k_{\beta} &= \frac{c}{\beta_{\max}} \sqrt{1 + C_2^2} \ln \frac{m_0 - \beta_{\max} t}{m_0 - \beta_{\max} t_a}, \quad t \in [0, t_a], \\
 k_{\beta} &= \frac{c}{m_p} \sqrt{1 + C_2^2} (t_a - t), \quad t \in [t_a, T]. \\
 t = t_a &\rightarrow k_{\beta} = 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Из условий на правом конце и первого интеграла имеем:

$$\begin{aligned}
 y(t_a) + w(t_a)(T - t_a) - \frac{g(T - t_a)^2}{2} &= 0, \\
 v(t_a) + C_2[w(t_a) - g(T - t_a)] &= 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Вторая функция переключения, согласно (18):

$$k_{\omega} = (T - t) \sqrt{1 + C_2^2}. \tag{23}$$

Активный участок:

$$t_a = \frac{m_T}{\beta_{\max}}. \quad (24)$$

Уравнения активного полета:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c}{\sqrt{1+tg^2\omega}} \left[t + \left(\frac{m_0}{\beta_{\max}} - t \right) \ln \left(1 - \frac{\beta_{\max} t}{m_0} \right) \right] + v_0 t + x_0, \\ v(t) &= v_0 + \frac{c}{\sqrt{1+tg^2\omega}} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \beta_{\max} t} \right), \\ y(t) &= \frac{cs}{\sqrt{1+tg^2\omega}} \left[t + \left(\frac{m_0}{\beta_{\max}} - t \right) \ln \left(1 - \frac{\beta_{\max} t}{m_0} \right) \right] + w_0 t + y_0 - \frac{gt^2}{2}, \\ w(t) &= w_0 - gt + \frac{cs}{\sqrt{1+tg^2\omega}} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \beta_{\max} t} \right), \quad m(t) = m_0 - \beta_{\max} t. \end{aligned} \quad (25)$$

Пассивный полет:

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= 0, \quad v(t) = v_0, \quad x(t) = x_0 + v_0 t, \\ \dot{w}(t) &= -g, \quad w(t) = w_0 - gt, \quad y(t) = y_0 + w_0 t - \frac{gt^2}{2}.\end{aligned}\tag{26}$$

Угол вектора тяги к горизонту:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{v(t_a)}{\sqrt{w^2(t_a) + 2gy(t_a)}},\tag{27}$$

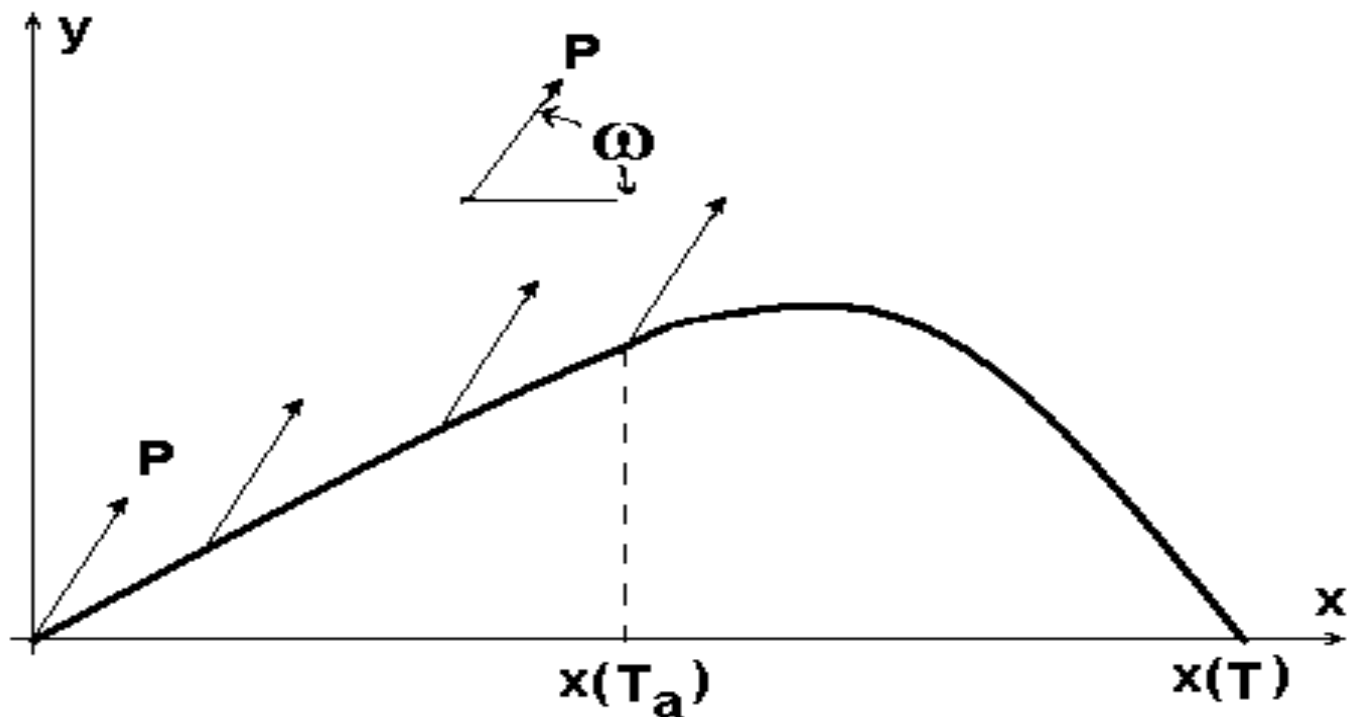


Рис. 0. Полет реактивного снаряда на максимальную дальность.

Конкретный пример:

$$m_p = m_T = 20kg, \quad P_{\max} = 600н, \quad c = 1000m / s.$$

$$T = T_a + T_p = 33.3sek + 55.5sek = 88.8sek. \quad \omega = 52^{\circ}42',$$

$$x(T) = 29551m, \quad y(T) = 0m, \quad v(T) = 420.4m / s \quad w(T) = -320.7m / s$$

Проблема Годдарда.

Физическая модель.

- ракета – материальная точка;
- Земля плоская и не вращается;
- сопротивление атмосферы пропорционально квадрату скорости ракеты;
- силы по оси абсцисс (боковые) отсутствуют;
- ускорение свободного падения g постоянно;
- двигатель безынерционный, тяга реактивная и рассчитывается по формуле $P=c\beta$.

Математическая модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = w, \\ \dot{w} = \frac{P - Bw^2}{m} - g, \\ \dot{m} = -\frac{P}{c}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \frac{u(t) - by_2^2}{y_3} - 1, \\ \dot{y}_3 = -u(t). \end{array} \right. \quad (28)$$

Краевые условия:

$$\begin{aligned} \tau = 0 : y_1 &= 0, & y_2 &= 0, & y_3 &= 1, \\ \tau = T : y_1 &= \max, & y_2 &= 0, & y_3 &= m_p. \end{aligned}$$

Решение задачи:

Управление (тяга):

$$\begin{cases} u(t) = 1, & y_3 > m_1 = by_2^2(1 + y_2). \\ u(t) = \frac{by_2(2 + 3y_2)(by_2^2 + y_3)}{[by_2(2 + 3y_2) + y_3]}, & m_1 \leq y_3 \leq m_p \\ u(t) = 0, & y_3 = m_p. \end{cases}$$

Приращение высоты на пассивном участке:

$$\delta y_1 = \frac{s_1}{s_2} \operatorname{Ln} \left| \frac{s_1}{\sqrt{1 + s^2[y_1(\tau_2)]^2}} \right| + \frac{y_1(\tau_2) \cdot (s - 1)}{s_2} \operatorname{Arctg}[s \cdot y_1(\tau_2)],$$

$$s = \sqrt{\frac{b}{\mu}}, \quad s_1 = 1 + s \cdot [y_1(\tau_2)]^2, \quad s_2 = \frac{b \cdot (1 + [y_1(\tau_2)]^2)}{\mu}, \quad \mu = 1 - m_p.$$

Конкретный пример:

$$m_0 = 120 \text{ кг}, \quad m_p = 24 \text{ кг}, \quad P_{\max} = 1412.6 \text{ н}, \quad b = 0.003072 \text{ кг/м}$$

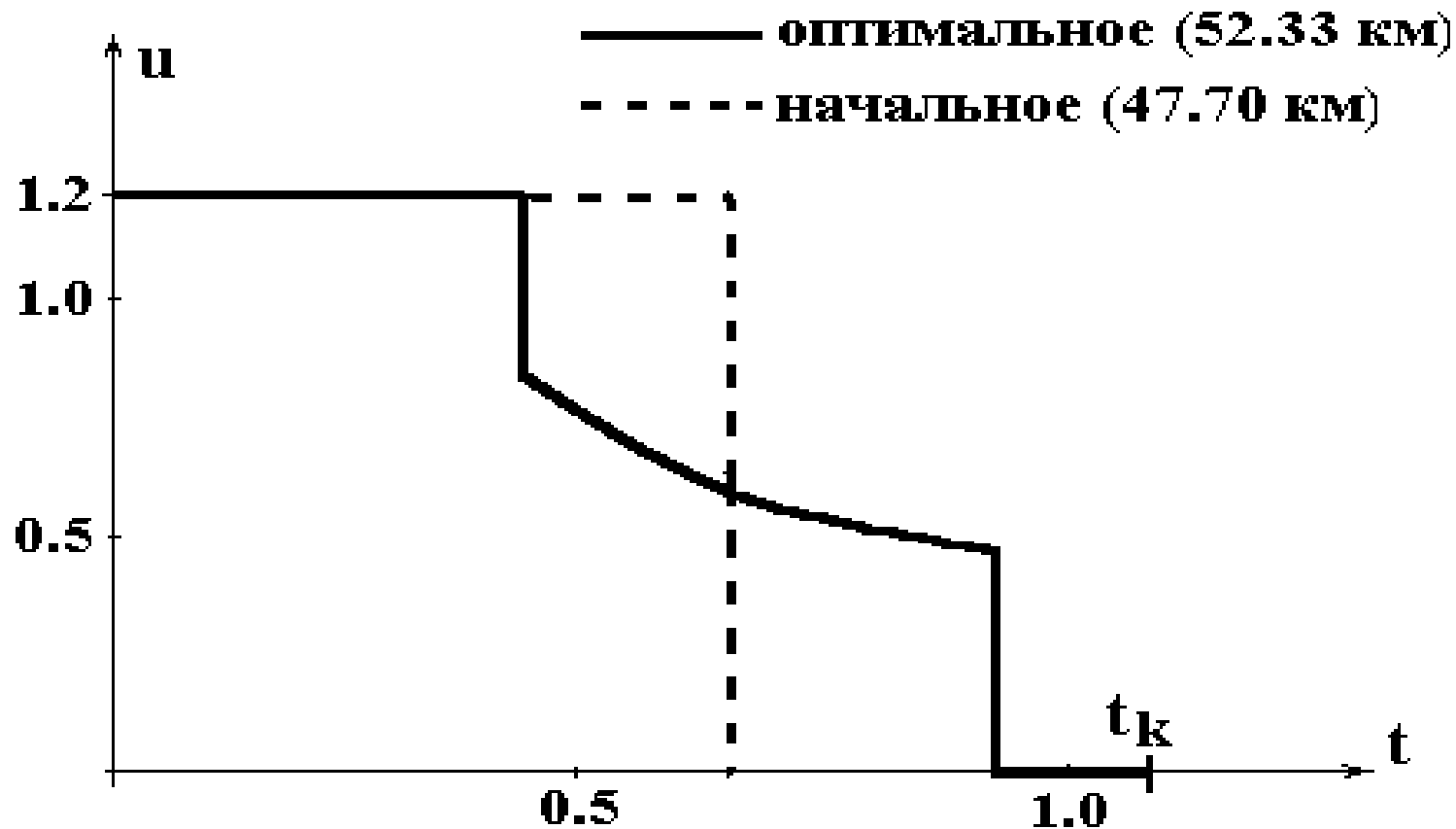


Рис.1. Вертикальный полет ракеты на максимальную высоту.

ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad F(x) = \min,$$

$$\varphi_p(x) = 0, \quad \psi_q(x) \leq 0, \quad p + q = m, \quad \Psi_q(x) = \left[\psi_q(x) + |\psi_q(x)| \right]$$

$$\text{Таким образом,} \quad F_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad F_{m+1} = \min. \quad (32)$$

МЕТОД НЬЮТОНА

Переходим в m -мерное многообразие посредством замены:

$$x_i = x_{i0} + \sum_{j=1}^m s_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

Поскольку

$$\delta F_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \delta x_i = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right) \delta s_k.$$

Идея Ньютона состоит в том, чтобы положить

$$\delta F_j = -F_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

что представляет собой систему m линейных уравнений

для определения m неизвестных δs .

Метод проектированного градиента

Задача оптимального управления (задача Майера):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \quad t \in [t_0, t_k], \\ x(t_0) &= x_0, \quad F_j(x(t_k)) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad F_{m+1} = \min. \end{aligned} \quad (33)$$

Дифференциал Гато:

$$\delta u_j = \sum_{i=1}^P \mu_i G_{ij}(t)$$

G_{ij} – функция – вариация j -го управления, доставляющая максимальное изменение i -му функционалу.

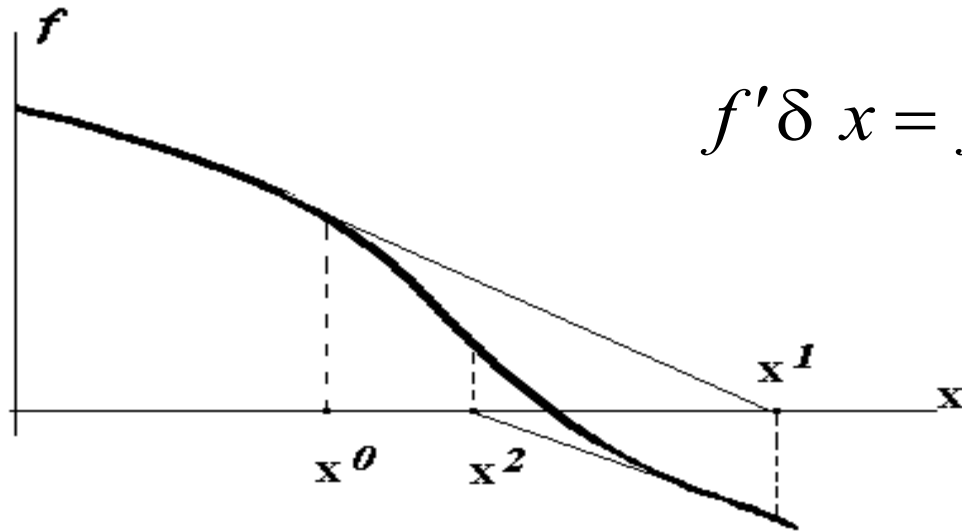
Показано:

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} \frac{\partial f_k}{\partial u_j},$$

$$\frac{d\lambda_{ir}}{d\xi} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_r} \lambda_{ij}, \quad \lambda_{ir}(t_k) = \frac{\partial F_i}{\partial x_r}, \quad \xi \in [t_k, t_0], \quad i = \overline{1, P}, \quad r = \overline{1, n}. \quad (34)$$

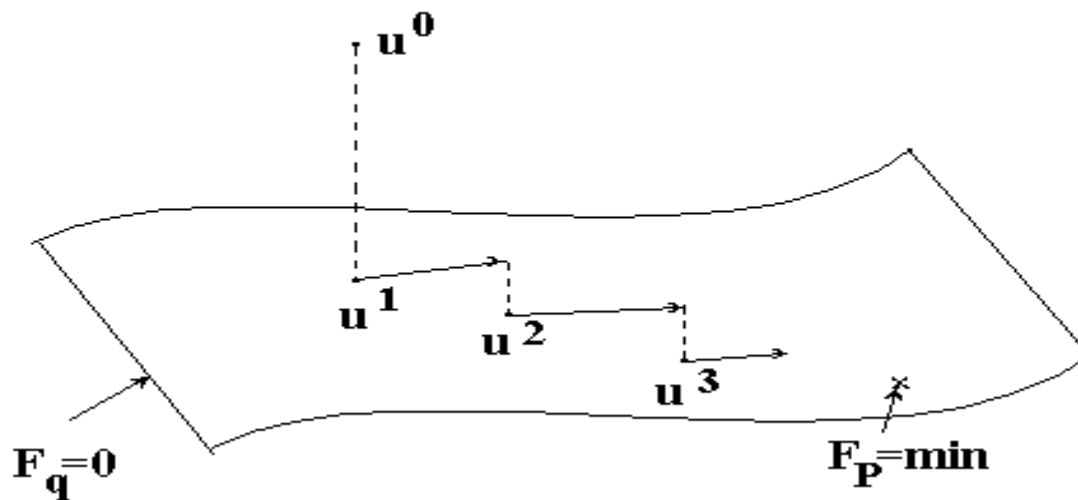
$$\frac{\delta F_i}{\delta \mu_r} = \psi_{ir}, \quad \dot{\psi}_{ir} = - \sum_{j=1}^m G_{ij}(t) G_{rj}(t), \quad \psi_{ir}(t_k) = 0, \quad i, r = \overline{1, P}.$$

Метод Ньютона:



$$f' \delta x = f'(x^i - x^{i-1}) = -f(x^{i-1}).$$

Метод проектированного градиента:



$$\frac{\delta F}{\delta u} = -F.$$

Запуск 2-й ступени АКС на заданную орбиту

Физическая модель

- Земля круглая,
- атмосфера отсутствует,
- двигатель – безинерционный ЖРД,
- внешние силы – только гравитационное притяжение Земли,
- система координат связанная (ось y проходит через центр масс АКС и центр Земли),
- боковые силы отсутствуют (плоское движение).

Математическая модель

$$\dot{y}_1 = \frac{u_2 (y_1 \cos u_1 - y_2 \sin u_1)}{(1 - y_4) \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \quad (\text{Ускорение по оси } x).$$

$$\dot{y}_2 = \frac{u_2 (y_1 \sin u_1 + y_2 \cos u_1)}{(1 - y_4) \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + \frac{y_1^2}{1 + y_3} - \frac{1}{(1 + y_3)^2}, \quad (\text{Ускорение по оси } y).$$

$$\dot{y}_3 = y_2, \quad \dot{y}_4 = -\frac{u_2}{I}. \quad (\text{Вертикальная скорость и скорость изменения массы}).$$

Граничные условия:

$$t = 0: \quad y_1 = a \cos S; \quad y_2 = a \sin S; \quad y_3 = b; \quad y_4 = 1;$$

$$t = t_k: \quad F_1 = y_1 - c = 0; \quad F_2 = y_2 = 0, \quad F_3 = y_3 - d = 0. \quad F_4 = y_4 = \max,$$

$$a = \frac{a_0 M}{\sqrt{R_3 g_0}}, \quad b = \frac{h_0}{R_3}, \quad c = \sqrt{\frac{R_3}{R_3 - h_k}}, \quad d = \frac{h_k}{R_3}.$$

Решение задачи запуска 2-й ступени АКС на орбиту

M – число Маха в момент пуска (скорость в момент пуска), $M=10$,

R_3 – радиус Земли,

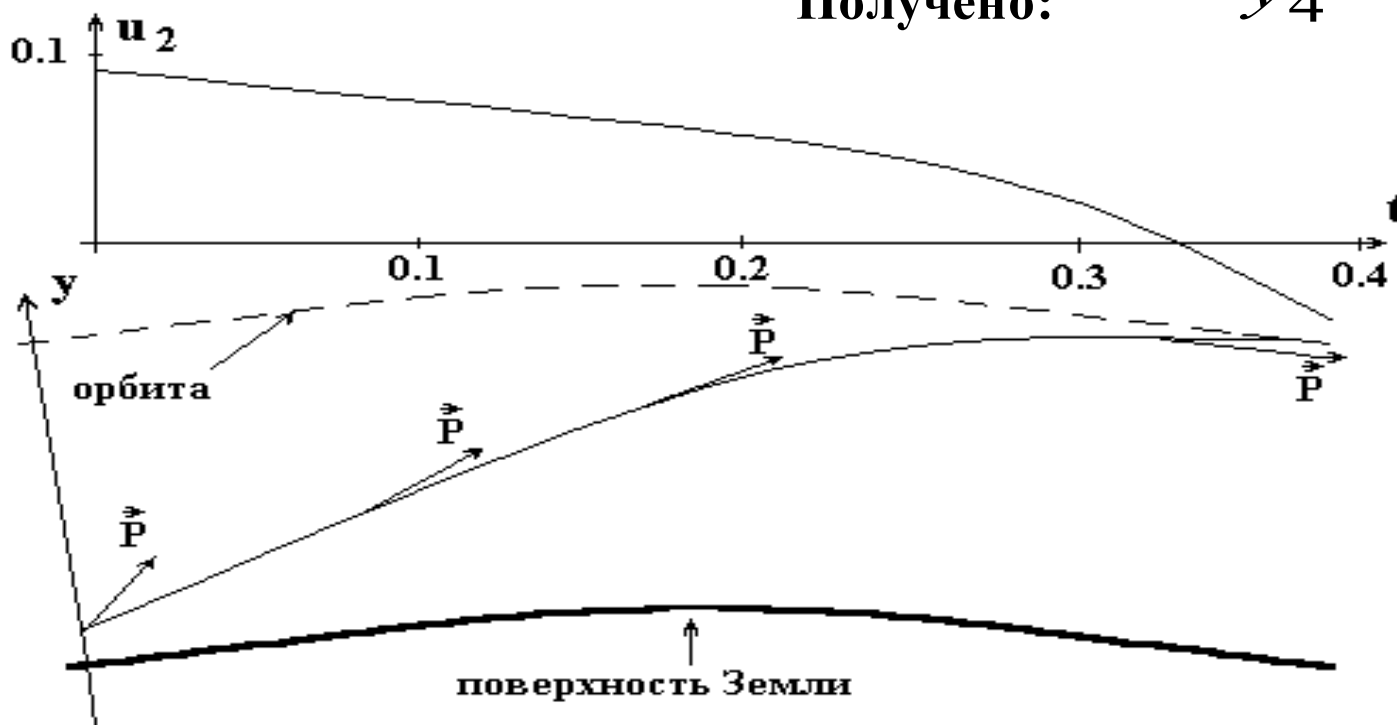
g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли,

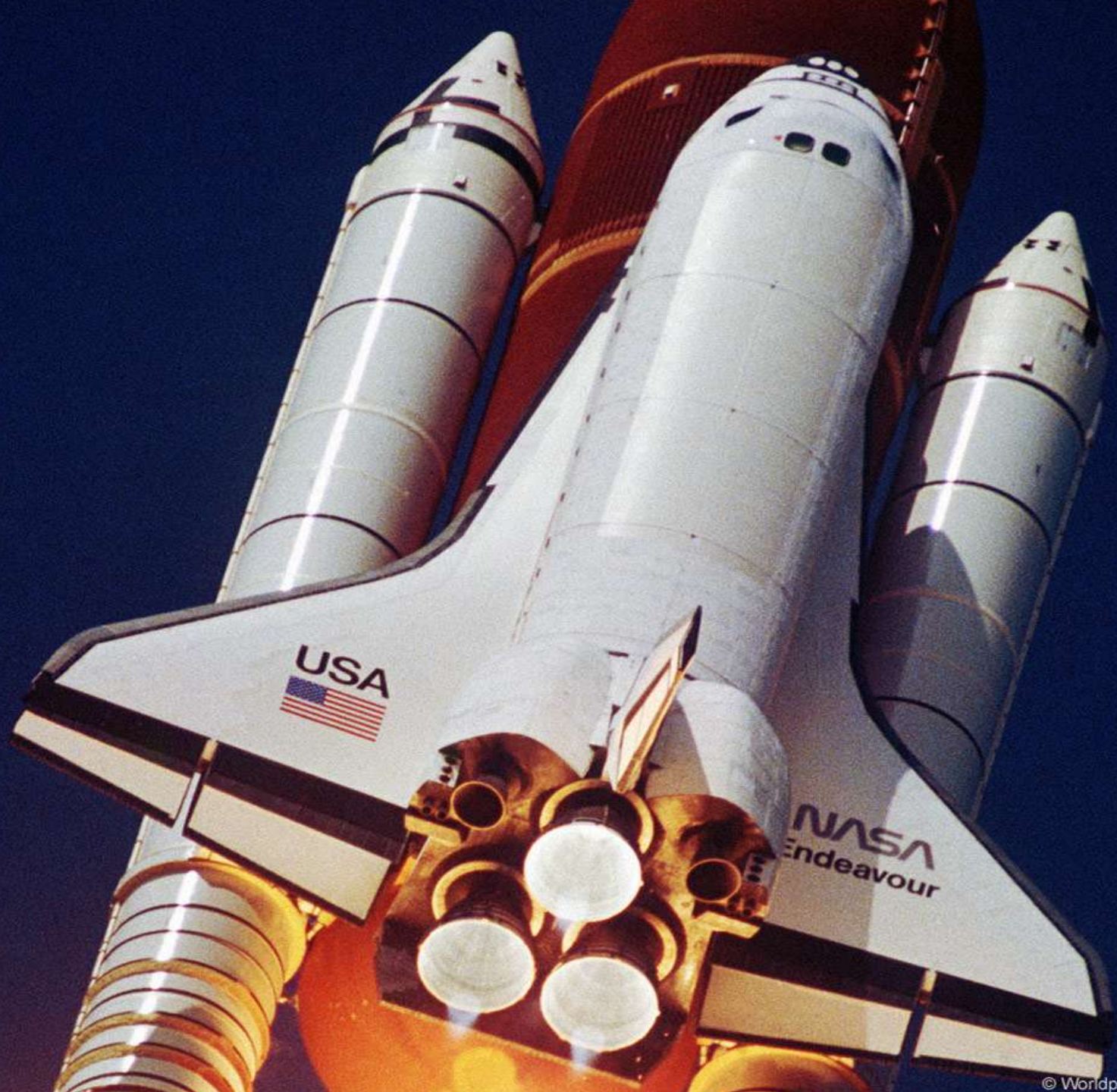
h_0 – высота пуска, (30 км.)

h_k – высота орбиты, (200км.).

S - угол вектора скорости в момент пуска ($S=0.31$).

Получено: $y_4 = 0.727$.





Оптимальное управление в динамике генных сетей

Математическая постановка задачи:

$$\dot{\vec{w}} = \vec{\phi}(\vec{w}(\tau), \vec{\lambda}, \vec{u}(\tau)),$$

$$\vec{w}(\tau_0) \Rightarrow \vec{u}(\tau) \Rightarrow \vec{w}(\tau_k) \in B = \left\{ \vec{w}_i : |\vec{w}_i - 1| \leq \Delta_i, \quad i = \overline{1, n} \right\};$$

$$\psi_l(\vec{w}, \vec{\lambda}, \vec{u}) \leq 0, \quad l \in L; \quad \vec{\phi}(\tau_k) = \vec{\phi}(\vec{w}(\tau_k), \vec{\lambda}, \vec{u}(\tau_k)) = 0;$$

$$\vec{\lambda} = \alpha_k \bigcup_{k \in K, m \in M} \alpha_m; \quad \vec{u}_j(\tau) \in D = \left\{ \vec{u} : \vec{u}^{min} \leq \vec{u}(\tau) \leq \vec{u}^{max} \right\}, \quad j \in J;$$

$$F(\vec{w}(\tau_k), \tau_k) \Rightarrow \min_{\vec{u}(\tau), \tau_k}, \quad \tau_k \in [0, T_{max}]$$

Биосинтез холестерина:

$$n=10, \quad K=2, \quad M=29, \quad J=8, \quad L=2. \quad w_3'(\tau) \geq 0; w_4'(\tau) \leq 0. \quad F(\vec{w}(\tau_k), \tau_k) = \tau_k.$$

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ:

- V_1 - транскрипционный фактор SREBP (sterol regulatory element-binding protein);
- V_2 - фермент 3-гидрокси-3-метилглутарил кофермент А редуктаза (HMG reductase);
- V_3 - свободный холестерин;
- V_4 - рецепторы липопротеинов низкой плотности;
- V_5 - липопротеины низкой плотности (ЛНП);
- V_6 - фермент стерол регулируемая протеаза (SRP);
- V_7 - ингибированный фермент SRP;
- V_8 - неактивный фермент АХАТ (ацил-КоА-холестерин-ацилтрансфераза); V_9 - активный фермент АХАТ;
- V_{10} - эфир холестерина.

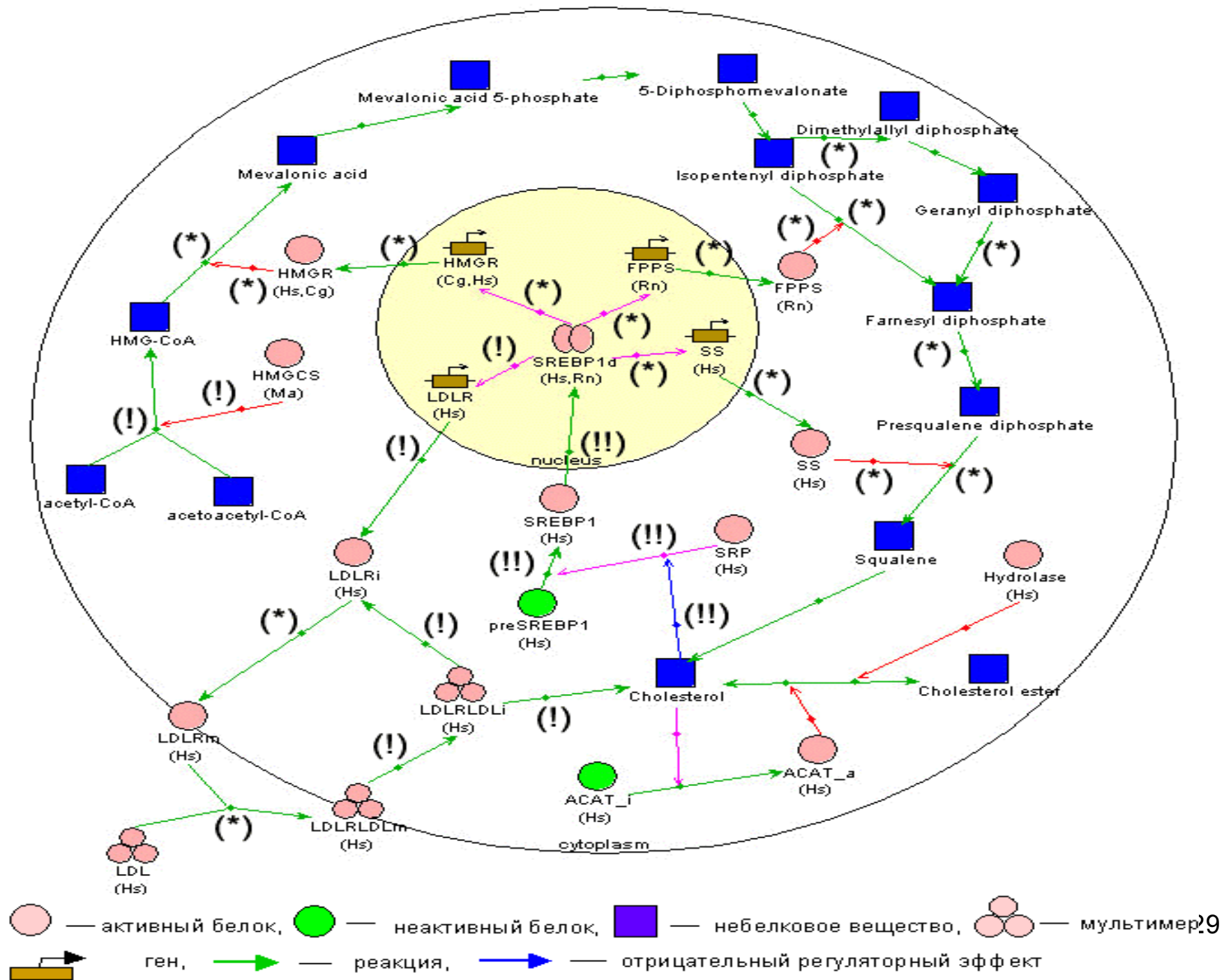
Составной функционал:

$$\Phi = F \cdot \left[1 + \sum_{j=1}^q \frac{\delta_j}{\varepsilon_j^2} \left(\langle \psi \rangle_{1j}^2 + \langle \psi \rangle_{2j}^2 \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{q+i}}{\varepsilon_{q+i}^2} (\eta_i + |\eta_i|)^2 \right].$$

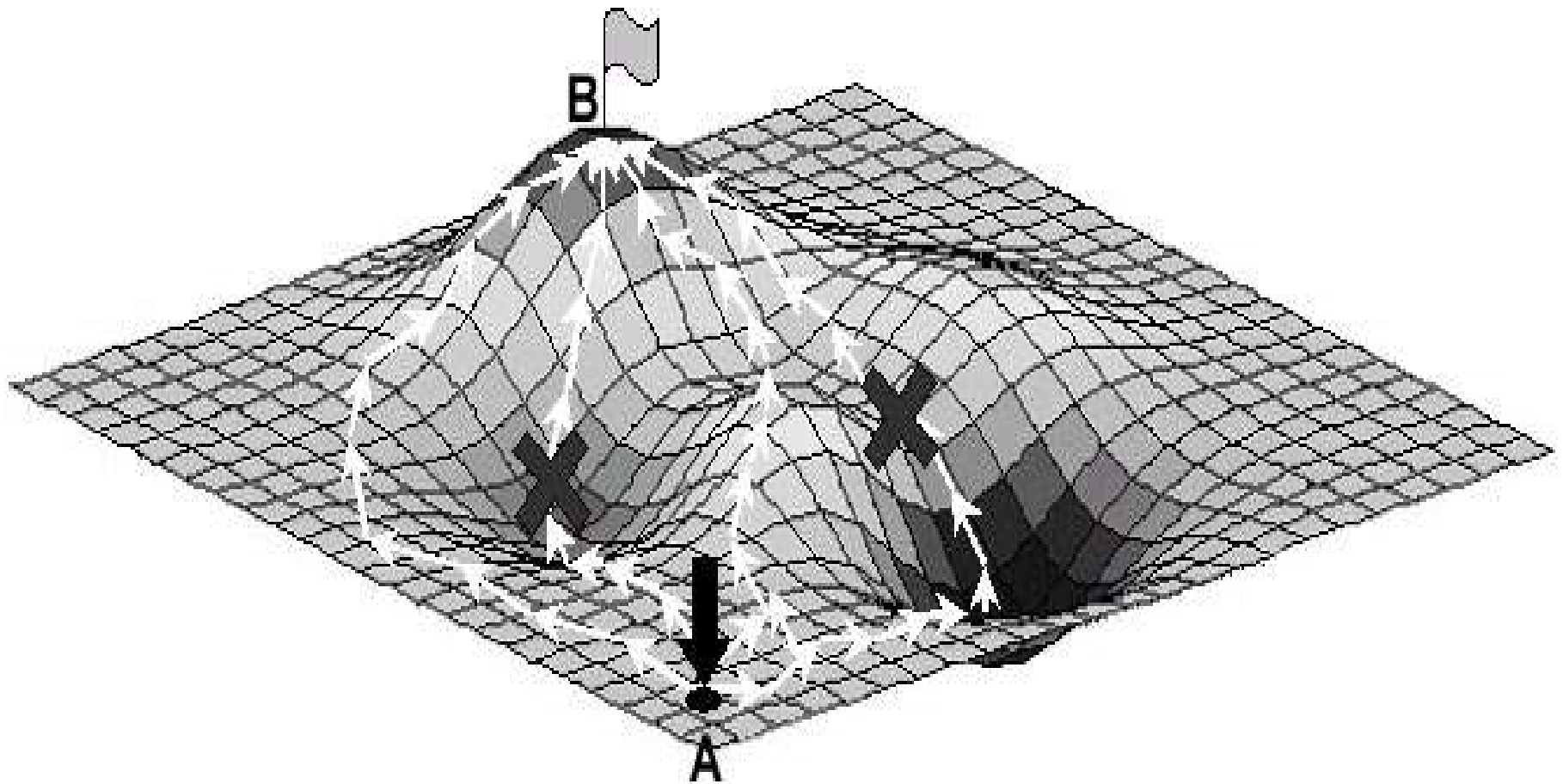
$$\langle \psi \rangle_{1j} = \frac{1}{T_{1j}} \int_{\Omega_{1j}} \psi_{1j}(\tau) d\tau, \quad \Omega_{1j} = \left\{ \tau: \psi_{1j}(\tau) > 0, \tau \in [0, \tau_k] \right\};$$

$$\langle \psi \rangle_{2j} = \frac{1}{T_{2j}} \int_{\Omega_{2j}} \psi_{2j}(\tau) d\tau, \quad \Omega_{2j} = \left\{ \tau: \psi_{2j}(\tau) > \langle \psi \rangle_{1j}, \tau \in [0, \tau_k] \right\};$$

$$\eta_i = |w_i(\tau_k) - 1| - (\Delta_i - \varepsilon_i); \quad F \geq 1.$$



Пути поиска максимума:



Решение

1-й этап:

Положим:

$$F(\vec{w}, \vec{u}) = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i^2(\vec{w}, \vec{\lambda}, \vec{u})$$

Требуется найти такие $\vec{\tilde{w}}, \vec{\tilde{u}}$, чтобы $F(\vec{\tilde{w}}, \vec{\tilde{u}}) = \min_{\vec{w} \in B, \vec{u} \in D} F(\vec{w}, \vec{u}) \leq \varepsilon_0$.

2-й этап

Требуется найти такие $u \in D$, $u(\tau_k) = \vec{\tilde{u}}$, чтобы

$$w_3'(\tau) \geq 0; \quad w_4'(\tau) \leq 0, \quad \tau \in [0, \tau_k], \quad F(\vec{w}(\tau_k), \tau_k) = \tau_k = \min.$$

Таблица 1.

	w_i^*	$w_i(0)$	$w_i(\tau_k)$	$u_j(\tau_k)$
1	$0.5821084999 \cdot 10^2$	1.5016989	0.8006046	119.98
2	$0.5495681053 \cdot 10^4$	1.4614053	1.1999876	0.0195
3	$0.3370067540 \cdot 10^6$	0.6659124	1.0741652	1.0014
4	$0.7118757840 \cdot 10^4$	1.4614053	1.1997881	0.9849
5	$0.2238008150 \cdot 10^6$	52.9910866	1.1904768	1.4831
6	0.5937566109	1.5016989	0.9169163	1.4829
7	$0.3999999762 \cdot 10^6$	1.0000000	0.9849196	0.8731
8	$0.1014834695 \cdot 10^5$	1.0073277	1.0004238	1.1005
9	$0.9851653055 \cdot 10^4$	0.9924516	1.0024357	
10	$0.1693993288 \cdot 10^6$	0.6940581	0.9691837	

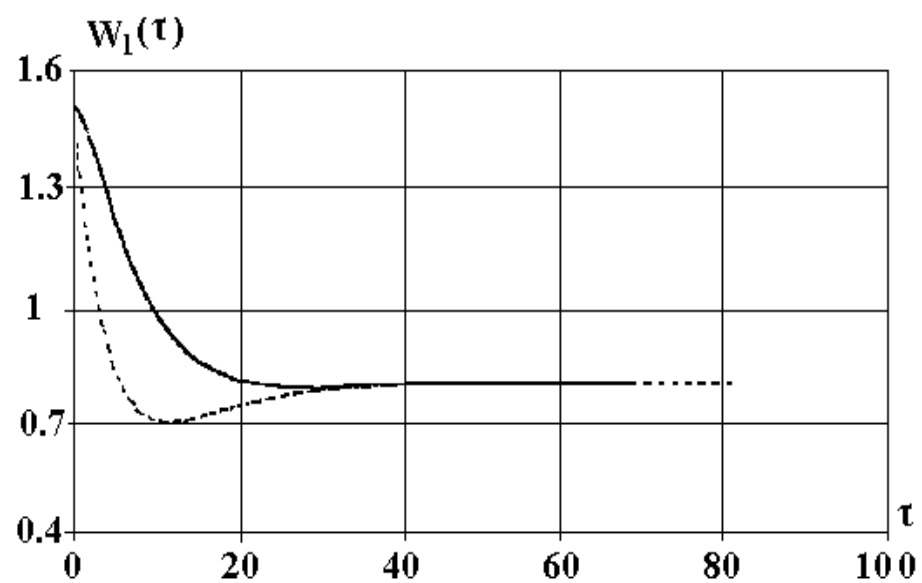


Fig. 1

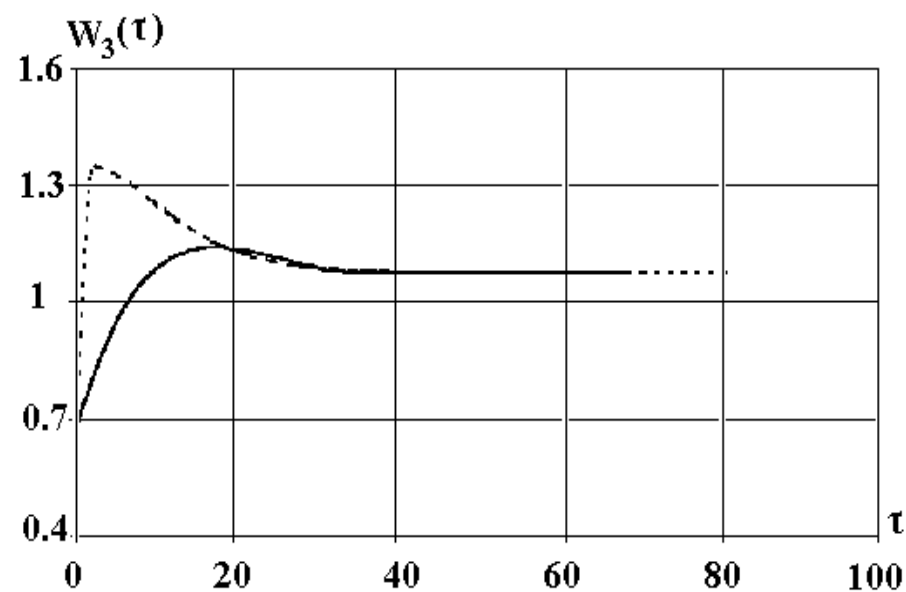


Fig. 2

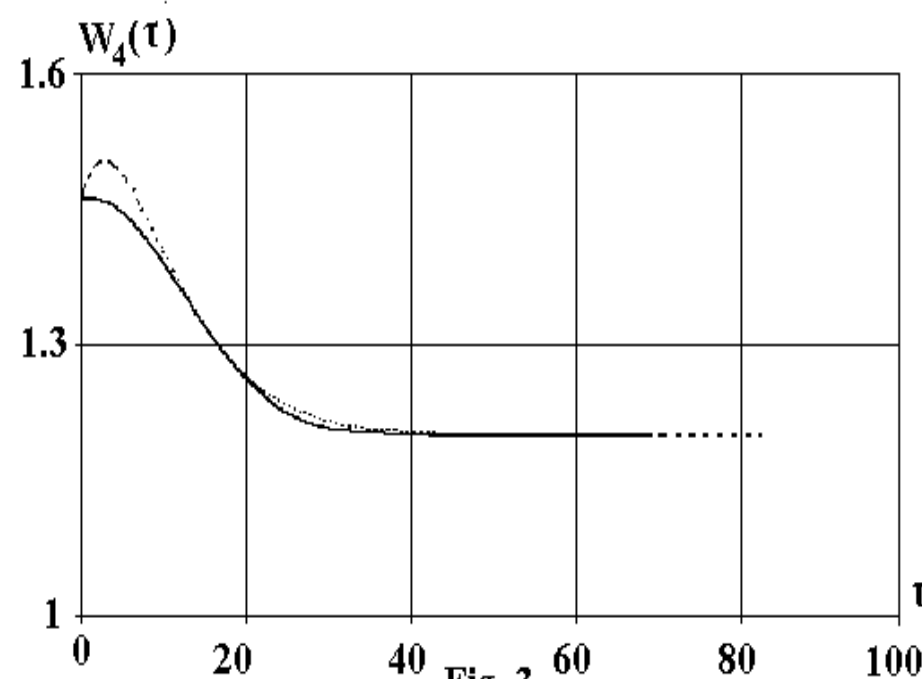


Fig. 3

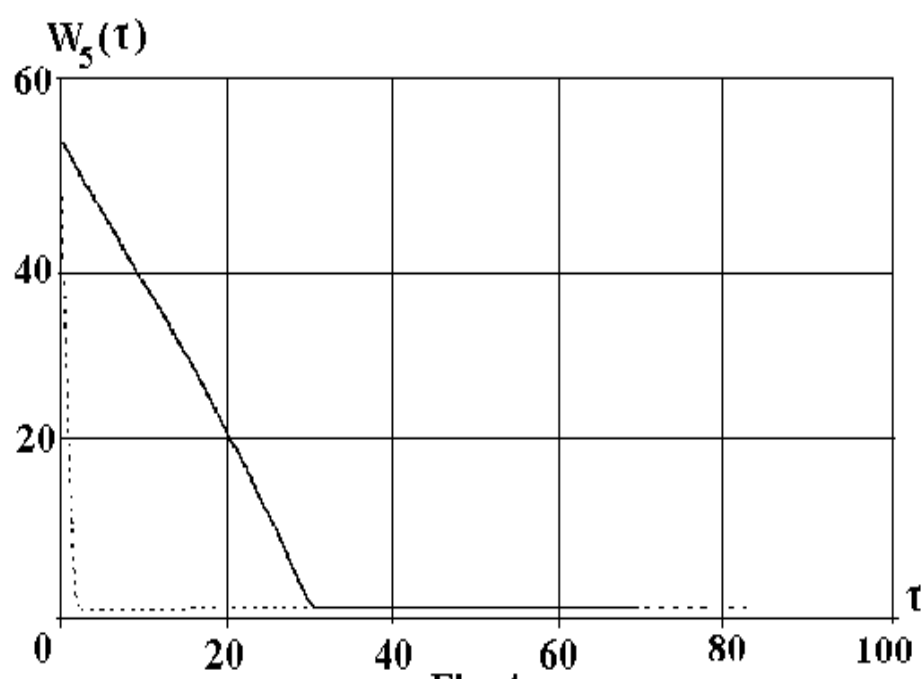


Fig. 4