

Лекция 9

Существование циклов

Как мы должны были заметить, рассматривая различные примеры, существование циклов одних периодов влечет существование циклов некоторых других периодов. Так, каково бы ни было отображение $f \in C^0(I, I)$, если у f есть цикл периода $m > 1$, то ввиду непрерывности f у отображения f есть и неподвижная точка (если I – ограниченный интервал, то неподвижная точка на I есть всегда).

Лемма 1. Между любыми двумя точками цикла периода $m > 1$ лежит хотя бы одна точка некоторого цикла периода $m' < m$.

Доказательство. Пусть $a > b$ – точки цикла периода m и n_a, n_b – количество точек этого цикла, лежащих левее точек a и b , соответственно. Очевидно, $m > n_a > n_b \geq 0$. Существует n_a различных целых положительных чисел s_i ($i = 1, \dots, n_a$), меньших m и таких, что $f^{s_i}(a) < a$. Здесь s_i – время перехода точки a в одну из точек цикла, лежащих левее a . Так как $n_b < n_a$, найдется s_r , $1 \leq r \leq n_a$ такое, что $f^{s_r}(b) > b$, в то время как $f^{s_r}(a) < a$. Следовательно, существует точка $\beta \in (b, a)$, для которой $f^{s_r}(\beta) = \beta$. Значит, β – неподвижная точка отображения f^{s_r} , то есть точка цикла периода $m' \leq s_r < m$.

Лемма 2. Если отображение имеет цикл периода $m > 2$, то у отображения есть и цикл периода 2.

Доказательство. Докажем утверждение, из которого лемма 2 немедленно вытекает: если отображение имеет цикл периода $m > 2$, то у отображения есть и цикл некоторого меньшего периода m' : $2 \leq m' < m$.

В том случае, когда между какими-либо двумя точками цикла периода m нет неподвижных точек, это утверждение сразу следует из леммы 1.

Рассмотрим вторую возможность: между каждыми двумя точками цикла есть неподвижные точки отображения f . Обозначим через a наименьшую точку цикла, b – наибольшую. Возьмем произвольную точку цикла, отличную от a и b , обозначим ее через c , и пусть для определенности $f(c) > c$. Далее, пусть n – наименьшее число шагов, за которое точка c переходит в точку a : $f^n(c) = a$, $2 \leq n < m$. По предположению, между точками a и c есть неподвижные точки отображения f . Выберем из них ближайшую к точке c и обозначим через d : $f(d) = d$ и при $x \in (d, c)$ $f(x) > x$. Следова-

тельно, функция $y = f^n(x)$ обладает свойством: $f^n(d) = d$ и в некоторой окрестности точки d при $x > d$ выполнено неравенство $f^n(x) > x$. Поскольку $f^n(c) = a < c$, то на интервале (d, c) есть точка β , для которой $f^n(\beta) = \beta$. Это – периодическая точка отображения f , период которой $m' \geq 2$ (на интервале (d, c) нет неподвижных точек) и $m' \leq n < m$.

Следствие 1. Если отображение f имеет цикл периода 2^l , $l \geq 1$, то у f есть циклы периодов 2^i , $i = 0, 1, \dots, l-1$.

Следствие 2. Если отображение f имеет цикл периода, отличного от 2^i для $i = 0, 1, 2, \dots$, то у f есть циклы периодов 2^i для всех $i = 0, 1, \dots$.

Отметим сначала, что если f имеет цикл периода q для некоторого $q \geq 1$, то итерации f^r для $r = 2^k \cdot q$ при $k \geq 1$ будут "добавлять дополнительные k витков по этому циклу".

Для того, чтобы доказать, что у отображения f есть цикл периода 2^n , достаточно применить лемму 2 к отображению $g = f^{2^{n-1}}$. Так, периодическая точка отображения f периода $2^r m$, $m > 1$ и нечетно, для отображения g является периодической точкой периода больше 2 (а именно, периода $2^{r-n+1}m$, если $n \leq r$, и периода m , если $n > r$). Согласно лемме 2, отображение g имеет периодическую точку периода 2, которая для f является, очевидно, периодической точкой периода 2^n .

Таким образом, уже следствие 2 говорит о том, что коль скоро отображение имеет цикл периода, не равного 2^i для $i = 0, 1, 2, \dots$, например, периода 3, то у f есть по крайней мере счетное число циклов, среди которых есть циклы сколь угодно большого периода.

Справедлив следующий точный результат.

Теорема (о сосуществовании циклов).

Если непрерывное отображение $I \rightarrow I$ имеет цикл периода m , то оно имеет также и циклы каждого периода m' такого, что $m' \triangleleft m$, где

$$\begin{aligned} 1 \triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2^3 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft \dots \\ \dots \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 9 \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3. \end{aligned}$$

Заметим сразу же, что для всякого m существует отображение, имеющее цикл периода m и не имеющее циклов периода m' при $m \triangleleft m'$.

Это теорема Александра Николаевича Шарковского, опубликованная в 1964 году: Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой

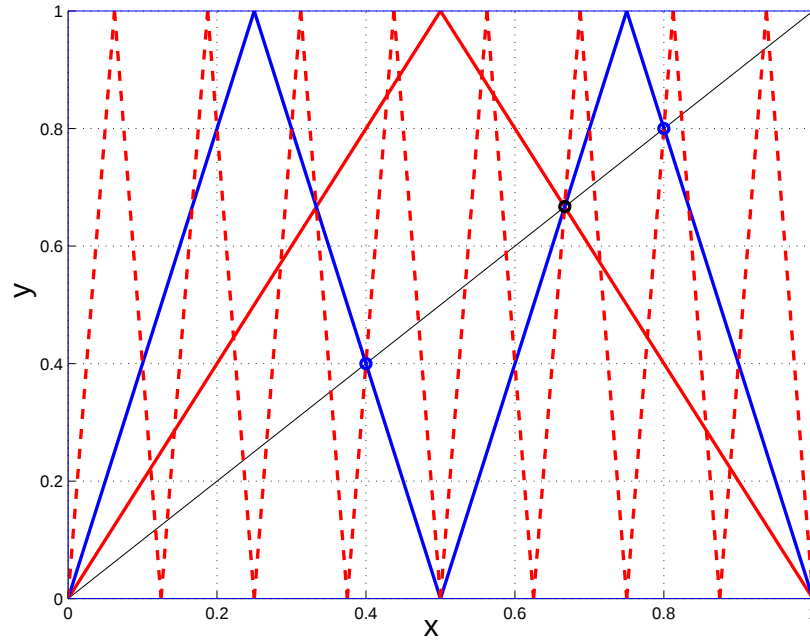


Рис. 1: Графики итераций g^m для $m = 1, 2, 4$

в себя, – Украинский математический журнал, 1964, № 1, с.61-71.

Число периодических орбит кусочно-линейного отображения $g(x)$

Для отображения $g(x)$:

$$x \rightarrow g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

периодическая орбита периода p является неподвижной точкой p -ой итерации g^p . Таким образом, она удовлетворяет уравнению $g^p(x) = x$ и является точкой пересечения диагонали $y = x$ с графиком $y = g^p(x)$. Поскольку для функции $g(x)$ таких пересечений в точности 2 (они соответствуют орбитам периода 1), то g^p имеет

$$N_g(p) = 2^p \quad (1)$$

неподвижных точек.

Некоторые из этих пересечений могут определять орбиты меньшего периода. Например, четыре неподвижные точки отображения g^2 – это две орбиты периода 1 и две точки орбиты периода 2. Другой пример, на Рис. 1 видно, что неподвижные точки итерации g^2 являются одновременно неподвижными точками четвертой итерации g^4 . Число периодических орбит,

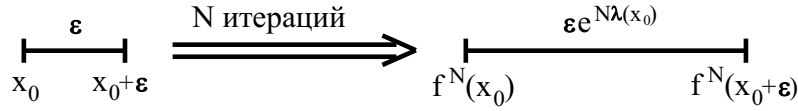


Рис. 2: Определение показателя Ляпунова для динамического отображения $x \rightarrow f(x)$

для которых p – наименьший период, определяется формулой

$$N(p) = \frac{N_g(p) - \sum_q qN(q)}{p}. \quad (2)$$

Суммирование здесь выполняется по всем q , где q – делитель p . Подчеркнем, что это определение $N(p)$ рекурсивное. Например,

$$N(6) = [N_g(6) - 3N(3) - 2N(2) - N(1)] / 6 = 9,$$

так как $N(3) = 2$, $N(2) = 1$, $N(1) = 2$ (проверьте это!).

Поскольку $N_g(p)$ возрастает экспоненциально с увеличением p , то для больших p можно аппроксимировать $N(p)$ таким образом:

$$N(p) \approx N_g(p)/p.$$

Итак, мы показали важное свойство итераций g^p : существует бесконечное число периодических точек и число $N(p)$ периодических орбит периода p экспоненциально возрастает в зависимости от периода p . Соответствующая скорость роста числа периодических орбит периода p такова:

$$h_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \ln N(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \ln \frac{N_g(p)}{p} = \ln 2. \quad (3)$$

Характеристики хаотического движения

Здесь мы вводим показатель Ляпунова как количественную характеристику хаотического движения, порождаемого одномерным отображением.

Показатель Ляпунова. В предыдущих лекциях мы уже видели, что под действием отображения

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (4)$$

соседние точки могут разбегаться, что ведет к хаотическому движению. Показатель Ляпунова $\lambda(x_0)$ характеризует степень экспоненциального разбегания, как показано на Рис. 2. Тогда для $\lambda(x_0)$ получаем выражение

$$\varepsilon \cdot e^{N\lambda(x_0)} \approx |f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|, \quad (5)$$

которое в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ дает точную формулу для $\lambda(x_0)$:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (6)$$

Отсюда следует, что $e^{N\lambda(x_0)}$ – это коэффициент растяжения. Он указывает, во сколько раз в среднем увеличивается за одну итерацию расстояние между очень близкими точками. Воспользуемся в (6) формулой для производной сложной функции (цепное правило):

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx} f^2(x) \right|_{x=x_0} &= \left. \frac{d}{dx} f(f(x)) \right|_{x=x_0} = \\ &= f'[f(x_0)] \cdot f'(x_0) = f'(x_1) \cdot f'(x_0), \quad x_1 = f(x_0), \end{aligned} \quad (7)$$

и запишем показатель Ляпунова в виде

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| \quad (8)$$

Задача 1. Вычислить показатель Ляпунова для треугольного отображения $g(x)$.

Среднее время предсказуемости хаотической системы

Показатель Ляпунова определяет среднее время, на которое можно предсказать состояние системы с динамическим хаосом. Рассмотрим, например, одномерное треугольное отображение, ограниченное единичным квадратом (Рис. 3). После n шагов по времени интервал l вырастает до $L = le^{\lambda n}$. Если L становится больше 1, то невозможно определить расположение траектории на $[0, 1]$, и можно лишь сказать, что система с вероятностью $\rho_0(x) dx$ находится в интервале $[x, x + dx] \subset [0, 1]$, где $\rho_0(x)$ – инвариантная плотность системы. Другими словами, точное предсказание состояния этой системы возможно только на интервале времени T_m таком, что

$$le^{\lambda T_m} = 1, \quad T_m = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{l} \right). \quad (9)$$

На временах, больших T_m , возможны лишь статистические предсказания. Отметим, что точность l , с которой определяется положение начального состояния системы, влияет на T_m лишь логарифмически. Здесь λ – показатель Ляпунова для отображения $g(x)$.

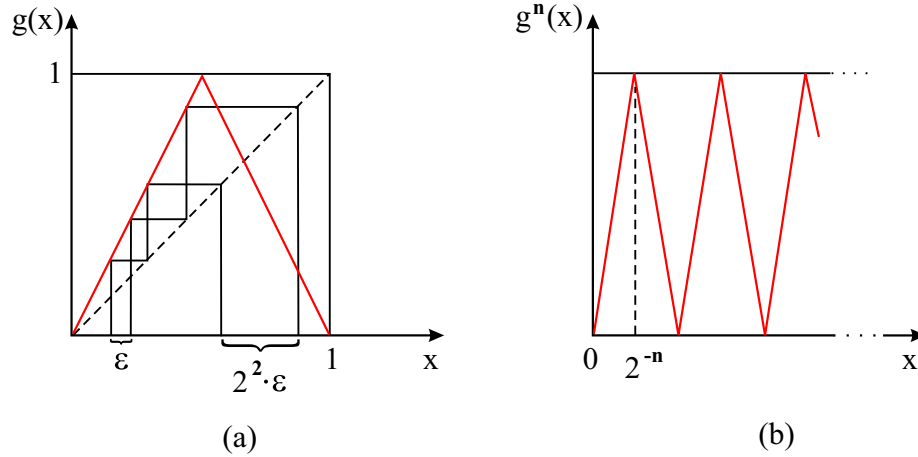


Рис. 3: Разбегание траекторий под действием итераций $g(x)$ (a) и n -ая итерация $g^n(x)$ (b)

Бифуркации периодических решений в одномерных динамических системах

Если динамическая система зависит от параметров, их изменение может приводить к различным качественным изменениям в поведении системы. Наиболее простые ситуации – бифуркации периодических решений, исследование которых сводится к локальному изучению отображения в окрестности одной или нескольких точек, образующих цикл.

Для однопараметрических семейств гладких отображений

$$f_\lambda : I \rightarrow I$$

имеется несколько типичных бифуркаций периодических траекторий. С одной из них – *бифуркацией удвоения периода* – мы уже встречались, когда рассматривали отображение

$$f_\lambda : x \rightarrow \lambda x(1 - x).$$

При увеличении параметра λ от 0 до $\lambda^* \approx 3.57$ последовательно появлялись притягивающие циклы периодов $1, 2, 2^2, 2^4, \dots$. При этом бифуркации циклов происходили по следующему сценарию. Если λ_n – значение параметра, при котором происходит бифуркация, приводящая к появлению цикла B_n периода 2^n , то при $\lambda_n < \lambda \leq \lambda_{n+1}$ цикл B_n притягивающий: его мультипликатор $\mu(B_n)$ при этом изменяется от $+1$ (при $\lambda = \lambda_n$) до -1 (при $\lambda = \lambda_{n+1}$). При $\lambda > \lambda_{n+1}$ мультипликатор $\mu(B_n) < -1$, и поэтому цикл B_n превращается при $\lambda = \lambda_n$ из притягивающего в отталкивающий. Появляющийся при $\lambda = \lambda_{n+1}$ цикл B_{n+1} имеет вдвое больший период, чем цикл B_n , и является

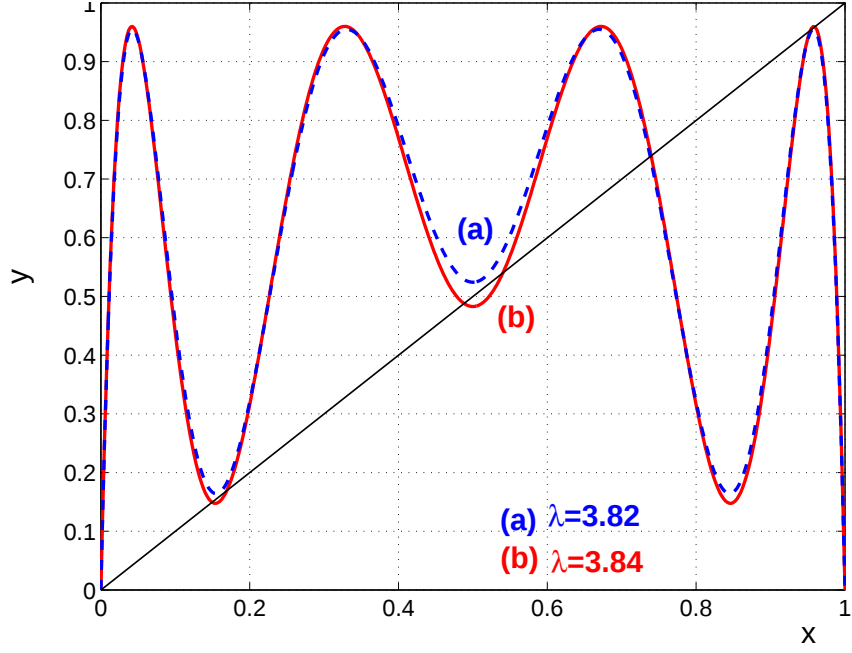


Рис. 4: Графики третьей итерации f^3 функции $f_\lambda(x)$ для $\lambda = 3.82$ и $\lambda = 3.84$

притягивающим при $\lambda_{n+1} < \lambda \leq \lambda_{n+2}$, причем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{n+1}} \mu(B_{n+1}) = \mu^2(B_n) = 1.$$

При дальнейшем увеличении параметра λ описанная картина повторяется.

При $\lambda > \lambda^* \approx 3.57$ у отображения $x \rightarrow \lambda x(1-x)$, как мы знаем, появляются циклы периодов, не равных 2^n ($n = 0, 1, 2, \dots$), и при $\lambda = 4$ уже есть циклы с любым периодом.

Одной бифуркации удвоения при этом заведомо недостаточно. Например, циклы нечетных периодов таким путем возникнуть не могут. В чем заключаются бифуркации, при которых появляются, в частности, циклы нечетных периодов, включая и неподвижные точки, ясно из Рис. 4, где приведены графики функции $y = f_\lambda^3(x)$ до появления цикла B_3 периода 3 ($\lambda = 3.82$) и сразу после его появления ($\lambda = 3.84$).

Задача 2 (Рис. 4). Опишите, как происходит бифуркация рождения цикла B_3 у логистического отображения $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ при $3.82 < \lambda < 3.84$.

Бифуркация, в общем, состоит в следующем. У отображения f_λ при $\lambda < \lambda_0$ имеется интервал J , на котором нет неподвижных точек отображения f_λ^n , например, при $x \in J$ выполняется неравенство $f_\lambda^n(x) > x$. При $\lambda = \lambda_0$ кривые $y = f_\lambda^n(x)$ и $y = x$ касаются в точке $x_0 \in J$, то есть появляется неподвижная точка x_0 отображения f_λ^n . Мультипликатор точки x_0

в момент бифуркации равен $+1$. При $\lambda > \lambda_0$ неподвижная точка распадается на две, одна из которых притягивающая, вторая – отталкивающая. У отображения f^3 (Рис. 4) появляется, таким образом, 3 неподвижных точки. Это *бифуркация рождения цикла периода 3*.

Обратим внимание на одно существенное отличие двух бифуркаций, о которых шла речь. Первая из них – бифуркация удвоения – имеет локальный характер и качественные изменения касаются только малой окрестности цикла (*мягкая бифуркация*). При второй – бифуркации рождения – в момент касания перекрывается движение точек вблизи $x = x_0$ из области $\{x < x_0\}$ в область $\{x > x_0\}$. При этом появление цикла (неподвижной точки) ведет к глобальным (не только вблизи x_0) качественным изменениям в поведении системы (*жесткая бифуркация*).

Отметим также, что рассмотренные выше бифуркации происходят, когда мультипликаторы циклов равны ± 1 . Это необходимое условие любых бифуркаций циклов для гладких отображений.

Сформулируем в виде двух теорем совокупность условий, при которых происходят бифуркации циклов. Будем обозначать штрихом производную по x , то есть $f'_\lambda(x) = \frac{d}{dx}f_\lambda(x)$.

Теорема 1. Пусть $f_\lambda : I \rightarrow I$ – семейство $\mathbf{C}^2$ -отображений, гладко зависящее от $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, x_0 – неподвижная точка отображения f_{λ_0} и производная по x в точке x_0 удовлетворяет условию $f'_{\lambda_0}(x_0) = 1$. Если

$$(i) \ f''_{\lambda_0}(x_0) > 0, \quad (ii) \ \frac{d}{d\lambda} f_\lambda(x_0) |_{\lambda=\lambda_0} < 0,$$

то существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

- (a) при $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0)$ отображение f_λ не имеет неподвижных точек на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$,
- (b) при $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta)$ отображение f_λ имеет две неподвижные точки на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, одна из которых притягивающая, а другая – отталкивающая.

Утверждения теоремы справедливы, если неравенства (i) и (ii) заменить на противоположные. Если только одно из них заменить противоположным, то неподвижные точки появятся при уменьшении параметра λ . Другими словами, неподвижные точки появляются при увеличении или уменьшении параметра λ , в зависимости от знака произведения $f''_\lambda(x) \cdot \frac{d}{d\lambda}f_\lambda(x)$ при $\lambda = \lambda_0$ и $x = x_0$.

Доказательство: Рассмотрим функцию $h(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. В точке (x_0, λ_0) , по условию теоремы,

$$h(x_0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Из теоремы о неявной функции следует, что существует гладкая функция $\lambda = \varphi(x)$ такая, что $\lambda_0 = \varphi(x_0)$ и

$$h(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad (11)$$

в некоторой окрестности $(x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$ точки x_0 , и $\lambda(x)$ можно записать в виде:

$$\lambda(x) = \varphi(x_0) + \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{d^2\varphi(x)}{d^2x} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (12)$$

Дифференцируя тождество (11) дважды, получаем

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda \partial x} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial h}{\partial \lambda} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} \equiv 0,$$

тогда

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda \partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial \lambda} \right)^{-1} + \frac{\partial h}{\partial \lambda} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} \equiv 0,$$

так как $(\partial h / \partial \lambda) \neq 0$ в некоторой окрестности $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 , где $\varepsilon < \varepsilon_1$. Но тогда из (10) и условия (i) теоремы следует, что при $x = x_0$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = - \left(\frac{\partial h}{\partial \lambda} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \neq 0, \quad (13)$$

и кривая $\lambda = \varphi(x)$ лежит по одну сторону от касательной в точке x_0 , причем из (12) и (13) следует

$$\lambda(x) = \lambda_0 - \frac{1}{2!} \cdot \left[\left(\frac{\partial h}{\partial \lambda} \right)^{-1} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

Более того, по условиям (i) и (ii) теоремы,

$$\left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right|_{(x, \lambda) = (x_0, \varphi(x_0))} > 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial \lambda} \right|_{(x, \lambda) = (x_0, \varphi(x_0))} < 0,$$

и, следовательно, для достаточно малого $\delta > 0$ функция $h(x, \lambda)$ не имеет нулей в окрестности точки x_0 при $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0)$, а при $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta)$ существуют два нуля функции $h(x, \lambda)$ вблизи x_0 , причем в одном из них

$h'_x < 0$ (то есть $f'_\lambda < 1$), а в другом $h'_x > 0$ (то есть $f'_\lambda > 1$). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $f_\lambda : I \rightarrow I$ – семейство $\mathbf{C}^3$ -отображений, гладко зависящее от $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, x_0 – неподвижная точка отображения f_{λ_0} и $f'_{\lambda_0}(x_0) = -1$. Если при $\lambda = \lambda_0$ и $x = x_0$

$$(i) \quad \frac{d^3 f_\lambda^2(x)}{dx^3} < 0, \quad (ii) \quad \frac{d}{d\lambda} (f'_\lambda(x)) < 0,$$

то существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

- (a) при $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0)$ отображение f_λ^2 имеет на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ только одну неподвижную точку, и эта точка – притягивающая,
(b) при $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta)$ отображение f_λ^2 имеет три неподвижных точки на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, причем две крайние образуют притягивающий цикл периода 2 для отображения f_λ , а средняя является отталкивающей неподвижной точкой отображения f_λ .

Если неравенство (ii) имеет противоположный знак, то утверждения останутся такими же, однако цикл периода 2 появится при уменьшении параметра λ . При замене знака в условии (i) необходимо в утверждении теоремы везде поменять местами слова "притягивающий" и "отталкивающий".

Доказательство: Отметим, что по теореме о неявной функции, существует функция $x = \varphi(\lambda)$ такая, что $x_0 = \varphi(\lambda_0)$ и $f_\lambda(\varphi(\lambda)) \equiv \varphi(\lambda)$ в окрестности точки λ_0 . Действительно, достаточно рассмотреть функцию $g(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$.

Далее, так как $f'_{\lambda_0}(x_0) = -1$, то при $x = x_0$

$$\frac{d^2}{dx^2} (f_{\lambda_0}^2(x)) = 0.$$

Для

$$h(x, \lambda) = f_\lambda^2(x) - x.$$

при $x = x_0$ и $\lambda = \lambda_0$ выполнены условия

$$h(x_0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\tilde{h}(x, \lambda) = \frac{h(x, \lambda)}{x - \varphi(\lambda)},$$

которая при $x = x_0$ и $\lambda = \lambda_0$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\tilde{h}(x, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2} \neq 0, \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \lambda} \neq 0.$$

Применив к $\tilde{h}(x, \lambda)$ рассуждения, использованные при доказательстве предыдущей теоремы, получим необходимое утверждение.

Теоремы 1 и 2 мы сформулировали для неподвижных точек. Если рассматривать бифуркации циклов периода n , следует f_λ заменить на f_λ^n .

Необходимо отметить, что для квадратичных отображений и вообще для отображений $x \mapsto f(x)$, имеющих отрицательный шварциан

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2,$$

условие теоремы 2 всегда выполнено. Поэтому для этих отображений возможен только один тип бифуркаций, связанных с удвоением периода.

Притягивающий цикл периода $n \longrightarrow$ бифуркация $\longrightarrow$ Отталкивающий цикл периода $n \oplus$ притягивающий цикл периода $2n$.