Лекция 8
Хаотическая динамика одномерных отображений

Просты ли одномерные динамические системы?

В теории динамических систем наряду с такими привычными понятиями, как периодичность, устойчивость и другие, в последнее время появился и стал весьма популярным термин *странный аттрактор*. Использование таких понятий, когда X – пространство большой размерности или хотя бы имеет размерность больше единицы, представляется естественным и необходимым. Это – результат длительного и плодотворного развития общей теории динамических систем, в частности, как основы качественной теории дифференциальных уравнений. Однако необходимо ли это, когда X – одномерное пространство? Может быть, и нет необходимости привлекать "такую артиллерию"? На первый взгляд, ситуация одномерного пространства кажется довольно простой.

ω-предельные множества

В теории динамических систем асимптотическое поведение траекторий характеризуется обычно с помощью ω-предельных множеств.

Определение: Точка $x' \in X$ называется *ω-предельной точкой* траектории $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, если для любой окрестности U точки x' и любого $n' > 0$ найдется $n'' > n'$, для которого $f^{n''}(x) \in U$. Иначе говоря, существует бесконечная последовательность $n_1 < n_2 < \ldots \to +\infty$ такая, что $f^{n_i}(x) \to x'$.

Множество всех ω-предельных точек траектории, проходящей через точку x, обозначают через $\omega(x)$. Это замкнутое множество, и если X – компакт, то оно инвариантно и непусто. Если X не является компактом, то возможна ситуация, что для некоторой точки $x \in X$ предельное множество $\omega(x) = \emptyset$, то есть с течением времени траектория стремится покинуть X. Таким образом, если X – компакт, то $\omega(x)$ – наименьшее замкнутое множество, любая окрестность которого содержит все точки траектории $\{f^n(x)\}$, начиная с некоторого номера N, зависящего от выбранной окрестности.

Наиболее просто ведут себя *периодические траектории* или *циклы*. Периодические траектории играют важную роль в теории динамических систем, это относится и к одномерным динамическим системам.

Определение: Точка $x_0 \in X$ называется *периодической точкой периода m*, если $f^m(x_0) = x_0$ и $f^i(x_0) \neq x_0$ при $0 < i < m$.

Каждая из точек $x_i = f^i(x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ также является периодической периода m, и точки $\{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ образуют периодическую траекторию, или цикл, периода m. В случае $m = 1$ периодическая траектория является неподвижной точкой отображения f, это цикл периода 1. Очевидно, что ω-предельное множество любой неподвижной точки x_s состоит из единственной точки: $\omega(x_s) = x_s$.

Для периодических траекторий ω-предельное множество совпадает с самой траекторией. Вообще если для какой-либо траектории ее ω-предельное множество представляет собой цикл, то эта траектория является либо периодической, либо *асимптотически периодической*, то есть притягивается периодической траекторией.

Существование периодических и асимптотически периодических траекторий – ситуация, типичная для одномерных динамических систем. В самом деле, каковы бы ни были точки $\beta_1, \ldots, \beta_m$, лежащие на интервале I и попарно различные, если положить $f(\beta_i) = \beta_{i+1}$ для $i = 1, 2, ..., m-1$ и $f(\beta_m) = \beta_1$, а затем продолжить $f(x)$ на интервал I произвольным образом, лишь бы функция $f(x)$ была непрерывной, то отображение $x \to f(x)$ будет иметь периодическую траекторию периода m, это $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$. Если к тому же $f(x)$ выбрать гладкой, то в окрестности каждой из точек β_i справедливо соотношение:

$$|f(x) - \beta_{i+1}| = |f(x) - f(\beta_i)| \approx |f'(\beta_i)| \cdot |x - \beta_i|,$$

и, следовательно,

$$|f^m(x) - \beta_i| \approx |f^m(\beta_i) - \beta_i + [f^m(\beta_i)]'(\beta_i - x)| = |\prod_{j=1}^{m} f'(\beta_j)| \cdot |x - \beta_i|.$$

Таким образом, если $|\prod_{j=1}^{m} f'(\beta_j)| < 1$ и точка x_0 достаточно близка к одной из точек цикла, то траектория $\{f^n(x_0)\}$ приближается к циклу $\omega(x_0) = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$.

Может ли ω-предельное множество состоять из конечного числа точек и не быть циклом? Например, состоять из двух циклов? Когда пространство X локально компактно, справедлив следующий общий факт.

Теорема. Если ω-предельное множество состоит из конечного числа точек, то эти точки образуют цикл.

Это утверждение является следствием свойства *несжимаемости*, которой обладает динамическая система на каждом ω-предельном множестве: если F

– ω-предельное множество, то для любого его собственного подмножества $V \subset F$ ($V \neq F$), открытого относительно F, образ $f(\overline{V})$ не является собственным подмножеством V (черта сверху, как обычно, означает операцию замыкания множества).

Как из этого утверждения вытекает утверждение, приведенное выше? Если F состоит из конечного числа точек и G – цикл в F, не совпадающий с F, то G – инвариантное множество, одновременно и замкнутое, и (относительно F) открытое, то есть $f(\overline{G}) \subset F$, что невозможно. Напомним, что гильбертово пространство локально компактно, если и только если оно конечномерно.

Если ω-предельное множество имеет мощность континуума, то оно может содержать или не содержать циклы. Простой пример динамической системы, для которой ω-предельные множества имеют мощность континуума, хорошо известен. Это – поворот окружности S^1 на некоторый угол μ. Пусть на S^1 задана параметризация такая, что все точки S^1 соответствуют $\varphi \in [0, 1)$ и точки $\varphi = 0$ и $\varphi = 1$ отождествляются. Если μ – иррациональное число, то поворот $\varphi \to \varphi + \mu$ порождает траектории

$$\{\varphi + n\mu (\mathrm{mod}\ 1)\}_{n=0}^{\infty},$$

которые при любом $\varphi \in S^1$ являются почти периодическими и плотны на S^1, так что $\omega(\varphi) = S^1$. Существование таких траекторий (как и периодических при рациональном μ) связано с возможностью возвращения точек в начальное положение или близкое к нему, которую обеспечивает топология S^1.

Задача 1. Покажите, что если μ – рациональное число, то отображение поворота окружности S^1 на угол μ порождает периодические траектории. Какие? Каков их период?

Вернемся к рассмотрению отображений на интервале $I \subset R$. Для такой динамической системы возможности возвращения, которую дает топология самого пространства, нет. Поэтому когда отображение $f : I \to I$, как и поворот S^1, обратимое (и мы имеем группу отображений, а не полугруппу), динамическая система на интервале I устроена совсем просто. Действительно, в этом случае f – монотонная функция, и либо сама f, либо вторая итерация f^2 монотонно возрастает (таким образом, вторая ситуация связана с первой).

Если функция f – монотонно возрастающая, то есть при $x' > x''$ выполняется неравенство $f(x') > f(x'')$, то все итерации отображения f обладают этим свойством: $f^m(x') > f^m(x'')$ при любом $m \geq 0$. Каждая траектория $\{x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots\}$, где $x_{m+1} = f(x_m)$, монотонна, то есть если $x_0 > x_1$, то

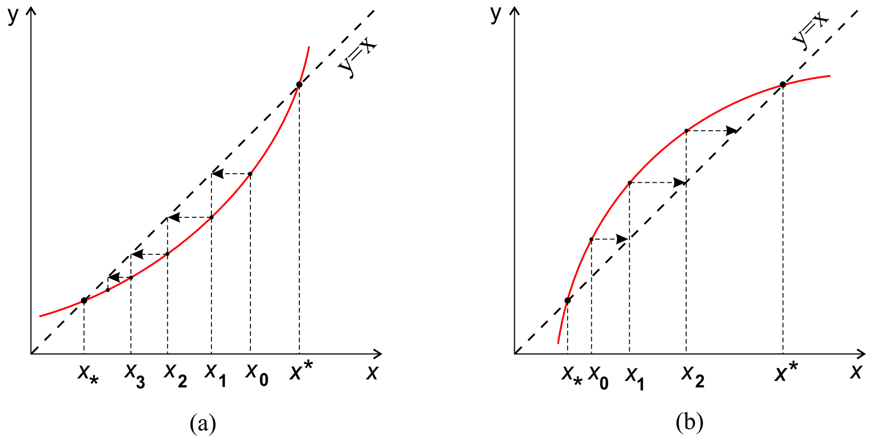

Рис. 1: Пример траекторий, асимптотически приближающихся к неподвижной точке x_* (a) или x^* (b)

$x_0 > x_1 > x_2 > ... > x_m > ...$, а если $x_0 < x_1$, то $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_m < ...$. Более того, траектория сходится к одной из неподвижных точек отображения f или совпадает с ней. Таким образом, для того, чтобы описать поведение произвольной траектории, в этом случае достаточно знать множество неподвижных точек

$$\mathrm{Fix}\,(f) = \{x \in I : \; f(x) = x\}$$

и, кроме того, знак разности $\mathrm{sign}[f(x) - x]$ на каждом интервале, дополнительном к $\mathrm{Fix}\,(f)$. Если начальная точка $x_0 \in (x_*, x^*)$, причем x_* и x^* являются неподвижными точками $(x_*, x^* \in \mathrm{Fix}\,(f))$, и интервал не содержит других неподвижных точек, то есть $(x_*, x^*) \subset I \backslash \mathrm{Fix}\,(f)$, то ω-предельное множество траектории, проходящей через точку x_0, состоит из одной точки, это x_* или x^* (см. Рис. 1). Если $\mathrm{sign}(f(x_0) - x_0) = -1$, то $f^n(x_0) \to x_*$ при $n \to \infty$. Если $\mathrm{sign}(f(x_0) - x_0) = +1$, то $f^n(x_0) \to x^*$ при $n \to \infty$.

В том случае, когда f – монотонно убывающая функция, каждая траектория распадается на две монотонные последовательности $x_0, x_2, x_4, ...$ и $x_1, x_3, x_5, ...$, одна из которых возрастает, другая убывает (см. Рис. 2). Для описания динамической системы достаточно знать $\mathrm{Fix}\,(f^2)$.

Гомоклинические траектории

Для того, чтобы динамическая система была устроена сложнее, необходимо, чтобы она не была группой отображений, то есть чтобы отображение $f : \; I \to I$ было немонотонным. Вследствие немонотонности f можно осуществить возвращение некоторых точек $x \in I$ в начальное положение и, следовательно, получить периодические точки, причем с любым периодом, а

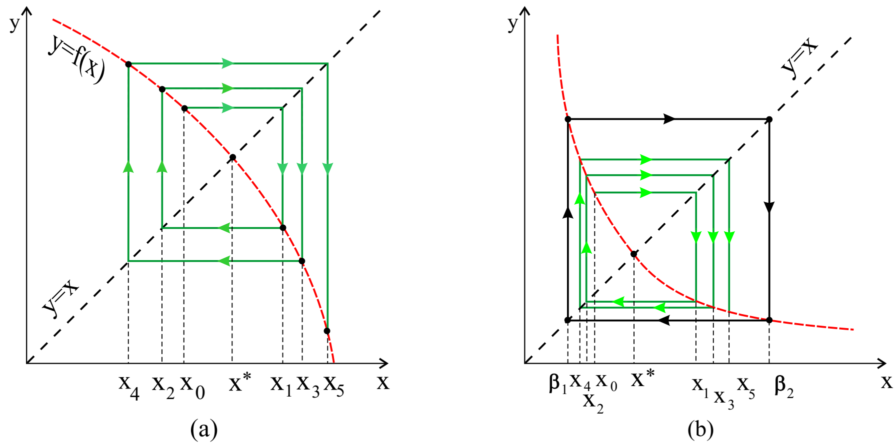

Рис. 2: Пример траекторий, удаляющейся от неподвижной точки x^* (a) и периодической периода 2 $\{\beta_1, \beta_2\}$ (b)

не только с периодами 1 или 2, как в случае монотонного отображения f.

В теории динамических систем (в частности, в качественной теории дифференциальных уравнений) признаком сложности системы могут служить так называемые гомоклинические траектории, впервые обнаруженные Анри Пуанкаре в задачах небесной механики.

Определение: *Гомоклиническая траектория* – это траектория, которая при возрастании и при убывании времени стремится к одной и той же периодической траектории.

Существование гомоклинической траектории, как правило, влечет за собой существование в любой ее окрестности счетного числа периодических траекторий, причем сколь угодно большого периода, а также траекторий с "квазислучайным" поведением. Такая сложная динамика объясняется тем, что из окрестности каждой точки цикла, который "притягивает" гомоклиническую траекторию, можно уходить и возвращаться уже двумя путями: вдоль цикла и вдоль гомоклинической траектории.

Дифференциальные уравнения могут иметь гомоклинические траектории, начиная с систем размерности три, если не учитывать исключительный случай, возможный на плоскости, когда сепаратриса, выходящая из седловой неподвижной точки, и сепаратриса, входящая в то же седло, образуют одну траекторию. Могут ли существовать гомоклинические траектории у одномерных динамических систем? В случае, который нас интересует, данное выше определение гомоклинических траекторий не годится, так как использует поведение траектории при убывании времени, а мы имеем дело с полугруппой

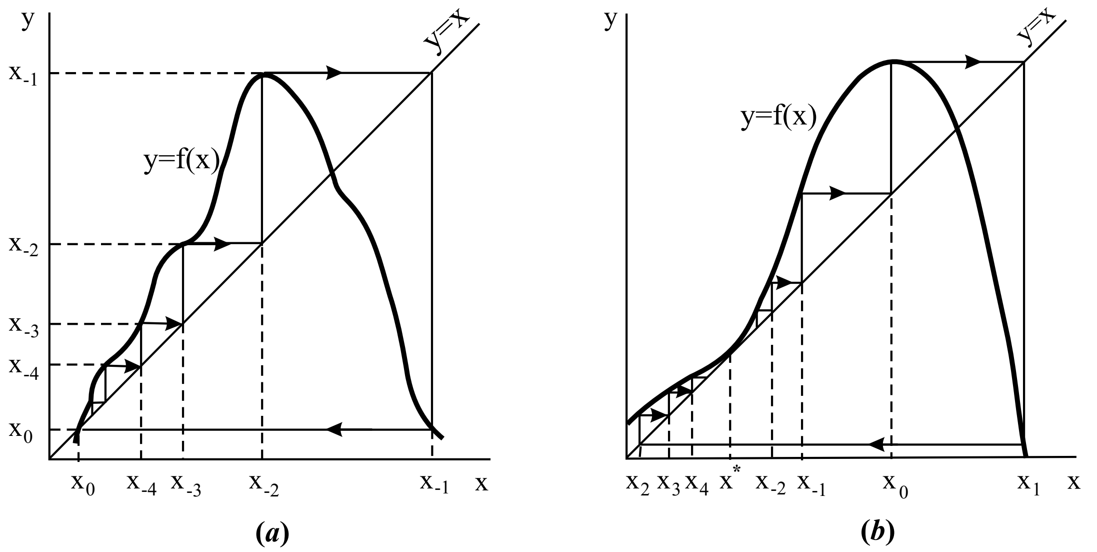

Рис. 3: Примеры гомоклинических траекторий, "приклеивающейся" к периодической точке x_0 периода 1 (a) и асимптотически приближающейся к неподвижной точке x^* (b)

отображений, и время, вообще говоря, необратимо. Одна из возможностей сохранить это понятие для полугруппы отображений – рассматривать "двусторонние" траектории $\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, где $x_{i+1} = f(x_i)$, если это возможно и необходимо. "Отрицательных" полутраекторий $\{x_i\}_{i=-1}^{-\infty}$ для точки x_0, конечно, может существовать много, если f^{-1} не является однозначной функцией. Но может случиться, что и нет ни одной, если, например, $f(I) \neq I$. К траектории $\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ уже можно применять определение гомоклинической траектории, данное выше.

Легко видеть, что существование гомоклинических траекторий у динамических систем – ситуация, далеко не исключительная. Действительно, пусть $x_{-1}, x_{-2}, \ldots$ – произвольная последовательность точек из интервала I, сходящаяся к точке x_0. Пусть, для простоты, $x_{-1} > x_{-2} > \ldots$ (Рис. 3a). Положим $f(x_0) = x_0$ и $f(x_i) = x_{i+1}$ при $i = -1, -2, \ldots$. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве $\{x_i\}_{i=0}^{-\infty}$ и ее всегда можно продолжить на весь интервал I с сохранением непрерывности. Для так построенного отображения $x \to f(x)$ траектория $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_0, x_0, \ldots$ – гомоклиническая и сходится к неподвижной точке x_0. В данном случае гомоклиническая траектория "приклеилась" к периодической точке x_0, циклу периода 1. Именно такой случай типичен для одномерных отображений, хотя могут существовать и гомоклинические траектории, не "приклеивающиеся" к периодическим (Рис. 3b).

Поэтому вопрос, просты ли одномерные системы, скорее следовало бы формулировать так: насколько сложными могут быть одномерные динамические системы? Результаты, которые получены, начиная с 60-х годов XX в., показывают, что одномерные динамические системы в определенном смысле могут быть такими же сложными, как и динамические системы в произвольных локально компактных пространствах.

Сложная динамика одномерных динамических систем

Вернемся к рассмотрению динамической системы, эволюция которой определяется логистическим отображением

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad f(x) = \lambda x(1-x). \tag{1}$$

• При любом $\lambda < \lambda^*(\approx 3.57)$ динамическая система, задаваемая отображением (1), устроена на $I = [0,1]$ достаточно просто: каждая траектория является асимптотически периодической. Каково бы ни было λ, существует единственный притягивающий цикл периода 2^m (m зависит от λ), который притягивает все точки из I за исключением счетного числа точек, "приклеивающихся" к отталкивающим циклам периодов $2^i, \; i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Что будет при $\lambda \geq \lambda^*$? Динамическая система устроена в этом случае более сложно. В частности, при любом $\lambda \geq \lambda^*$ существуют траектории, не притягивающиеся к циклам, и, следовательно, для таких траекторий ω-предельное множество бесконечно.

Не останавливаясь на анализе всех возможных ситуаций, рассмотрим динамическую систему при нескольких значениях параметра:

$$\lambda = \lambda^*(\approx 3.57), \quad 3.83, \quad 4, \quad \lambda > 4.$$

• При $\lambda = \lambda^*$ отображение (1) уже имеет циклы периодов $2^i, i = 0, 1, \ldots$, и все они отталкивающие, неустойчивые. Циклов других периодов не существует. Рассмотрим множество всех периодических точек

$$\mathrm{Per}\,(f) = \{x \in I : \exists\; m \geq 1, \quad f^m(x) = x\}.$$

Тогда $K = [\mathrm{Per}\,(f)]'$ – множество предельных точек для множества периодических точек – совершенное нигде не плотное множество, то есть гомеоморфно множеству Кантора. Множество K не содержит периодических точек:

$$K \bigcap \mathrm{Per}\,(f) = \emptyset$$

Напомним, что *совершенным* называется множество M, если оно замкнуто и каждая его точка является предельной (то есть там нет изолированных точек).

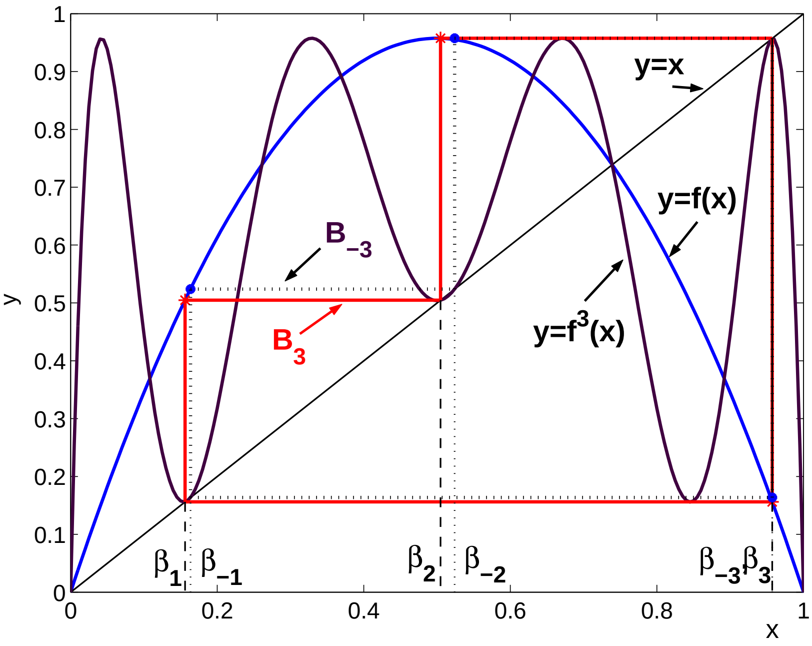

Рис. 4: Циклы периода 3 отображения (1) при $\lambda = 3.83$: устойчивый $B_3 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ и неустойчивый $B_{-3} = \{\beta_{-1}, \beta_{-2}, \beta_{-3}\}$, $B_3 = \{0.15616, 0.50470, 0.95742\}$, $B_{-3} = \{0.16356977, 0.52400029, 0.95741657\}$

• $\lambda = 3.83$. Если продолжать увеличивать параметр λ, будут появляться новые циклы, в том числе периодов, отличных от $2^i, i = 0, 1, \ldots$. При $\lambda = 3.83$ отображение уже имеет циклы с любым периодом $m \in N$. Например, притягивающим является цикл B_3 периода 3, образованный точками $\{\beta_1$, β_2, $\beta_3\}$ (Рис. 4) Кроме притягивающего, есть отталкивающий цикл периода 3 - это точки $\{\beta_{-1}$, β_{-2}, $\beta_{-3}\}$.

Точки обоих циклов вычисляются как нули полинома 6 степени

$$\frac{f^3(x) - x}{f(x) - x}.$$

Какие точки притягивает цикл B_3? Рассмотрим прообразы точки β_{-3} – это точки β_{-2} и $1 - \beta_{-2}$. Обозначим интервал $(1 - \beta_{-2}, \beta_{-2})$ как I_0.Тогда

(a) $f^3(I_0) \subset I_0$ (например, $f^3(1/2) \in I_0$),

(b) на интервале I_0 имеется только одна и притом притягивающая неподвижная точка β_2 отображения f^3,

(c) циклов периода 2 отображение f^3 не имеет.

Следовательно, для любого $x_0 \in I_0$ при $n \to \infty$ выполнено $f^{3n}(x_0) \to \beta_2$, то есть точка x_0 притягивается циклом B_3, интервал I_0 входит в область притяжения цикла B_3.

Так как всякая траектория, притягиваемая циклом B_3, должна проходить и через I_0 (это окрестность точки β_2), то множество

$$P = \bigcup_{i=0}^{+\infty} f^{-i}(I_0)$$

состоит из тех и только тех точек I, которые притягиваются циклом B_3. Множество P – открытое, плотное на I, причем $\operatorname{mes} P = \operatorname{mes} I = 1$ (это показано в статьях А.Н. Шарковского и Дж. Гукенхаймера). Значит, цикл B_3 притягивает почти все точки из I.

Множество $I \backslash P$ состоит из точек, которые не притягиваются циклом B_3, и представляет собой совершенное, нигде не плотное множество, то есть гомеоморфное множеству Кантора.

Более детальный анализ можно найти в книге А.Н. Шарковского.

- $\lambda = 4$. В этом случае $\max_{x \in I} f(x) = f(1/2) = 1$, так что $f(I) = I$ (Рис. 5). Чтобы получить представление о свойствах динамической системы, задаваемой отображением

$$x \longmapsto 4x(1-x), \tag{2}$$

воспользуемся тем, что отображение (2) топологически эквивалентно кусочно-линейному отображению

$$x \to g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 \le x \le 1. \end{cases} \tag{3}$$

Определение. Два отображения

$$f_1 : X_1 \to X_1, \qquad f_2 : X_2 \to X_2$$

топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h : X_1 \to X_2$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & f_1 & \\ X_1 & \to & X_1 \\ h \downarrow & & h \downarrow \\ X_2 & \to & X_2 \\ & f_2 & \end{array}$$

коммутативна, т.е. $h \circ f_1 = f_2 \circ h$.

Для отображения (2) и (3) $X_1 = X_2 = I$, и сопрягающий гомеоморфизм $h : I \to I$ задается функцией

$$h(x) = 2/\pi \arcsin \sqrt{x}.$$

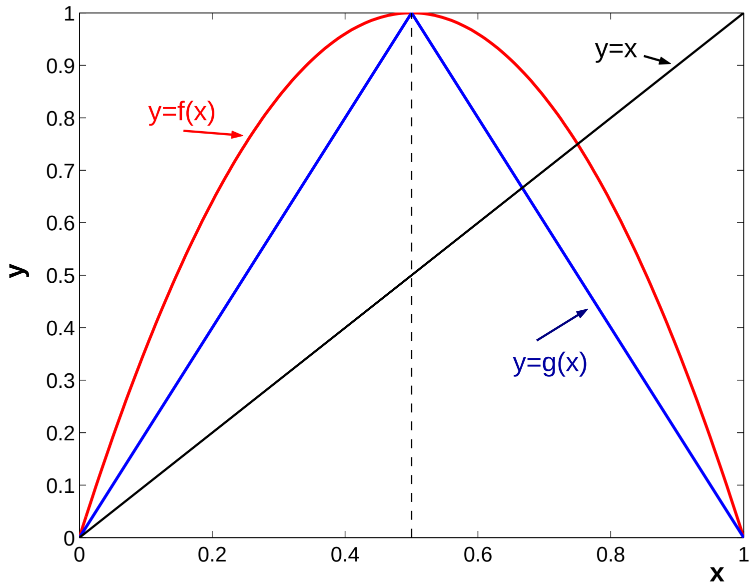

Рис. 5: Топологически эквивалентные отображения (2) и (3)

Действительно, в таком случае

$$h^{-1}(x) = \sin^2 \pi x/2,$$

и необходимо проверить, что $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Поскольку

$$0 \le h^{-1}(x) \le 1/2 \quad \text{для} \quad 0 \le x \le 1/2,$$

$$1/2 \le h^{-1}(x) \le 1 \quad \text{для} \quad 1/2 \le x \le 1,$$

то при $0 \le x \le 1/2$

$$h^{-1} \circ g \circ h(x) = \sin^2(\frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}) =$$

$$= \sin^2(2 \arcsin \sqrt{x}) = (2\sqrt{x}\sqrt{1-x})^2 = f(x)$$

при $1/2 \le x \le 1$

$$h^{-1} \circ g \circ h(x) = \sin^2 \left[2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{x} \right) \right] = \sin^2(2 \arcsin \sqrt{x}) = f(x).$$

Если два отображения топологически эквивалентны (или сопряжены), то сопряжены (или эквивалентны) и дискретные динамические системы, порожденные этими отображениями. В самом деле, если $h \circ f = g \circ h$, то при любом $n > 0 \quad h \circ f^n = g^n \circ h$. Каждой траектории одной динамической системы соответствует траектория другой динамической системы. Это соответствие задает функция h: траектории отображения f, проходящей через точку x_0, отвечает траектория отображения g, проходящая через точку $h(x_0)$.

Асимптотические свойства соответствующих друг другу траекторий одинаковы: $w-$предельные множества траекторий $\{f^n(x_0)\}$ и $\{g^n(x_0)\}$ гомеоморфны между собой. Если одна из этих траекторий притягивается циклом, то и другая притягивается циклом и т.д.

Таким образом, чтобы изучить свойства отображения (2), достаточно рассмотреть кусочно-линейное отображение (3), что сделать проще. При этом можно использовать методы так называемой символической динамики. В двоичной записи каждая точка $x \in I$ имеет вид

$$x = 0.\, a_1 a_2 \dots a_i \dots,$$

где $a_i = 0$ или $a_i = 1$. Согласно (3),

$$g(x) = \begin{cases} 0.\, a_2 a_3 \dots a_i \dots, & a_1 = 0, \\ 0.\, \bar{a}_2 \bar{a}_3 \dots \bar{a}_i \dots, & a_1 = 1, \end{cases}$$

где $\bar{a}_i = 1 - a_i$, то есть отображение g от последовательности нулей и единиц $a_1 a_2 a_3 \dots$ отбрасывает первую цифру, а остальные оставляет без изменений (когда $a_1 = 0$) или заменяет на противоположные (когда $a_1 = 1$). Это позволяет легко разобраться, например, с периодическими траекториями: такие траекториии должны проходить через точки, которые в двоичной записи имеют периодические последовательности из нулей и единиц.

Для исследования отображения (3) используем другой метод, основанный на том. что отображение (3) является растягивающим (раздвигает близкие точки). Этот метод при надлежащем его развитии может быть применен к произвольным непрерывным отображениям. Следствием того, что отображение (3) является растягивающим, является следующий полезный факт.

Лемма 1. Для любого открытого в I интервала $J \subset I$ существует $m > 0$ такое, что $g^m J = I$.

Доказательство почти очевидно:
1) Если $J \cap 1/2 = \emptyset$, то $\mathrm{diam}\,(gJ) = 2\ \mathrm{diam}\,(J)$.
2) Рассмотрим интервал $[0, \varepsilon]$ при некотором ε, тогда для $m \geq 1$ образ этого интервала $g^m[0, \varepsilon] = [0, \varepsilon \cdot 2^m]$ при $\varepsilon \cdot 2^m < 1$ и $g^m[0, \varepsilon] = I$ при $\varepsilon \cdot 2^m \geq 1$. Значит, утверждение Леммы справедливо.
3) Если $1/2 \in J$, то существует $\delta > 0$ такое, что $[\delta, 1] \subset g(J)$. Тогда из п.2 следует утверждение Леммы, так как $[0, 2\delta] \subset g^2(J)$.
4) Пусть теперь $J \subset I$ - произвольный интервал, такой что $J \cap \{1/2\} = \emptyset$.

Если $\max\{x \in J\} < 1/2$, то длина интервала будет удваиваться на каждой итерации и $\mathrm{diam}\,(g^{r+1}(J)) = 2\ \mathrm{diam}\,(g^r(J))$, пока $g^r(J) \cap 1/2 = \emptyset$. Пусть r_0 – наименьшее r такое, что $1/2 \in g^{r_0}(J)$. Тогда из п.3 следует, что лемма справедлива.

Если же $J \cap 1/2 = \emptyset$ и $\min\{x \in J\} > 1/2$, то ...

Задача 2. Рассмотреть в Лемме 1 случай, когда $J \subset I$ – произвольный интервал, для которого $J \cap \{1/2\} = \emptyset$.

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо и для отображения (2), а это совсем не кажется очевидным, так как это отображение в окрестности точки $x = 1/2$ сильно сжимает интервалы, $f'(1/2) = 0$. Более того, эта лемма позволяет доказать ряд важных свойств динамической системы (3).

Утверждение 1. На I всюду плотны периодические точки. Любой открытый интервал содержит периодические точки сколь угодно больших периодов.

Доказательство. Пусть J – произвольный открытый интервал и m таково, что $g^m J = I$. Найдутся точки x' и $x'' \in J$, для которых $g^m(x') = 0$ и $g^m(x'') = 1$. Отображение g непрерывно (следовательно, и g^m – непрерывное отображение для любого $m > 0$), поэтому найдется точка x_0, лежащая между точками x' и x'', для которой $g^m(x_0) = x_0$. Точка x_0 периодическая, и её период является делителем m.

Чтобы доказать, что на J есть периодические точки, период которых больше, например, m_0, рассмотрим на J отображение $g^{m_0!}$. Это кусочно-линейное отображение, монотонно изменяющееся от 0 до 1 и от 1 до 0. Существует открытый интервал $\widetilde{J} \subset J$, на котором $g^{m_0!}(x) \neq x$, и поэтому не содержащий периодических точек, период которых равен $1, 2, 3, \ldots, m_0$. В это же время на $\widetilde{J}$, согласно доказанному, есть периодические точки, и, следовательно, их периоды больше m_0. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Существует траектория, всюду плотная на I.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение 2, возьмем какой-либо счетный базис на I, например, образованный открытыми интервалами $J_1, J_2, \ldots, J_s, \ldots$ из I. То, что $\{J_s\}$ образуют базис, означает, что для любой точки $x \in I$ найдется последовательность интервалов $\{J_{s_i}\}$ такая, что

$$J_{s_1} \supset J_{s_2} \supset \ldots \supset J_{s_i} \supset \ldots, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} J_{s_i} = \{x\}.$$

Например, в качестве базиса можно взять интервалы, концы которых двоично рациональные числа из I. Траектория, точки которой попадают в каждый из интервалов $J_s \ \ (s = 1, 2, \ldots)$, очевидно, всюду плотна на I.

Покажем, что найдется точка $x_0 \in J_1$ такая, что

$$\{g^i(x_0)\}_{i=0}^{\infty} \cap J_s \neq \emptyset, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

Согласно Лемме 1, для каждого $s = 1, 2, \ldots$ найдется положительное число m_s такое, что $g^{m_s}(J_s) = I$. Так как $g^{m_1}(J_1) = I \supset J_2$, то существует открытый в I интервал $J^{(1)} \subset J_1$ такой, что $g^{m_1}(J^{(1)}) = J_2$. Далее, поскольку $g^{m_2}(J_2) = I \supset J_3$ и $g^{m_1}(J^{(1)}) = J_2$, то существует открытый интервал $J^{(2)} \subset J^{(1)}$ такой, что $g^{m_1+m_2}(J^{(2)}) = J_3$. Так как $g^{m_3}(J_3) = I \supset J_4$, существует открытый интервал $J^{(3)} \subset J^{(2)}$ такой, что $g^{m_1+m_2+m_3}(J^{(3)}) = J_4$ и т.д. Получаем последовательность вложенных друг в друга интервалов

$$J_1 \supset J^{(1)} \supset J^{(2)} \supset J^{(3)} \supset \ldots \supset J^{(s)} \supset \ldots$$

для которых

$$g^{\sum_{i=1}^{s} m_i} J^{(s)} = J_{s+1}.$$

Через каждую точку множества $\bigcap_{s=1}^{\infty} \overline{J^{(s)}}$, очевидно, проходит траектория, плотная на J. Утверждение 2 доказано.

- $\lambda > 4$. Поскольку $f(1/2) = \lambda/4 > 1$, то, следовательно, $f(I) \nsubseteq I$. В частности, $f(1/2) > 1$ и $f^n(1/2) \to +\infty$ при $n \to \infty$. Так же ведут себя другие траектории, начинающиеся в точках интервала

$$J = \{x \in I : \quad f(x) > 1\}.$$

Концы интервала J удовлетворяют условию $f(x) = 1$, это точки

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - 1/\lambda}.$$

Приведем без доказательства утверждение, определяющее важное свойство множества P точек $x \in I$, для которых траектории $\{f^n(x)\} \subset I$. Напомним, что квадратичное отображение $f(x)$ (1) и кусочно-линейное отображение $g(x)$:

$$x \ \to \ g(x) = \begin{cases} \lambda x/2, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ \lambda(1-x)/2, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

топологически эквивалентны для каждого значения параметра λ.

Утверждение 3. $K = \{x \in [0,1] : \ \ g^n(x) \in [0,1], \ n \geq 0\}$ – стандартное множество Кантора.

Следовательно, P – совершенное, нигде не плотное множество, гомеоморфное множеству Кантора, причем $\operatorname{mes} P = 0$.