

Лекция 6

Одномерные отображения

Одной из базовых моделей, позволяющих исследовать временную упорядоченность и хаотические режимы в нелинейных средах, являются отображения отрезка в себя или, как их часто называют, *одномерные отображения*.

Исследование одномерных отображений позволило ввести новые понятия, применимые к большому классу диссипативных систем, обнаружить ряд новых явлений, ответить на несколько принципиальных вопросов. Как происходит переход от простейших упорядоченных к хаотическим режимам? Как чередуются в пространстве параметров области, в которых наблюдается порядок и хаос? Как происходит усложнение упорядоченности при изменении параметра? Каковы основные типы стохастических режимов в таких системах и способы их описания?

Обратим внимание на парадоксальность этих вопросов. В самом деле, одномерное отображение – это детерминированная система. Тем не менее, процессы, которые она описывает, могут обладать рядом стохастических свойств.

Рассмотрим для определенности простейшую модель, приводящую к одномерным отображениям.

Логистическое отображение

Допустим, что нас интересует изменение численности какого-либо вида животных в определенном районе. Один раз в год мы их считаем и получаем число x . Построим по этим данным последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, для краткости будем ее обозначать $\{x_n\}$. Здесь $n = 1$ соответствует первому измерению. По-видимому, среди чисел x_n есть какая-то закономерность. Естественно ожидать, что численность популяции в данный год x_{n+1} зависит от того, сколько животных было год назад, то есть от величины x_n . Таким образом, в простейшем случае

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda). \quad (1)$$

Здесь f – непрерывная функция, λ – параметр, который зависит от того, какую конкретно задачу мы рассмотрим. Часто используется квадратичная функция f вида $\lambda x(N - x)$:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(N - x_n), \quad 0 \leq x_n \leq N. \quad (2)$$

Эта формула показывает, что если $\lambda N > 1$, то численность вида быстро растет, пока она мала ($x_n \ll N$), и начинает быстро убывать, когда животных

становится слишком много ($x_n > N$). Модель такого вида была предложена в середине XIX века Ферхюльстом для описания процесса роста биомассы. Первый член в правой части уравнения (2) отражает размножение, а второй – гибель животных.

Удобно ввести *относительную численность* или *плотность популяции* x' , сделав замену переменных $x_n = x'_n N$, $\lambda = \lambda'/N$. При этом формула (2) приобретает вид

$$x'_{n+1} = \lambda' x'_n (1 - x'_n), \quad 0 \leq x'_n \leq 1. \quad (3)$$

Как легко показать, значения плотности популяции будут оставаться в $[0, 1]$ для значений *коэффициента размножения* $\lambda' \in [0, 4]$. В дальнейшем штрихи у новых переменных будем опускать.

Квадратичное отображение вида (3) называется *логистическим отображением*. Нас интересует вопрос о том, что произойдет с различными видами по прошествии достаточно долгого времени. Для ответа на него в этой простейшей модели достаточно выяснить, какой будет последовательность $\{x_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ для различных λ .

Переход к хаосу. Сценарий Фейгенбаума

Из формулы (3) следует, что функция $f(x)$ переводит отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[0, \lambda/4]$. Если $\lambda \leq 4$, то все значения x_n лежат на отрезке $[0, 1]$ при условии, что $0 \leq x_1 \leq 1$. Именно поэтому говорят, что формула (3) дает отображение отрезка в себя. Поведение последовательности в этом и других случаях удобно представить графически. Нарисуем кривую $y = f(x)$ при выбранном значении λ и прямую $y = x$ (Рис. 1). Точки их пересечения определяют неподвижные точки логистического отображения (3).

При небольших значениях λ ($0 < \lambda \leq 1$) получим, что $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ независимо от выбора x_1 . Отложим x_1 по оси абсцисс, проведем вертикаль до пересечения с кривой $y = f(x)$ (точка A на Рис. 1), затем из нее горизонталь до пересечения с линией $y = x$ (точка B). Теперь вновь проведем вертикаль до пересечения с осью x . Легко проверить, что $x_2 = f(x_1)$. Взяв точку x_2 за начальную и повторив все те же операции, получим x_3 , затем x_4 и т.д. Из рисунка видно, что $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. То же самое получается, если x_1 взять из интервала $(0.5, 1]$, то есть для произвольного $x_1 \in [0, 1]$ получим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Это означает вымирание популяции с таким коэффициентом размножения.

Пусть теперь λ больше 1. При этом последовательность $\{x_n\}$ ведет себя

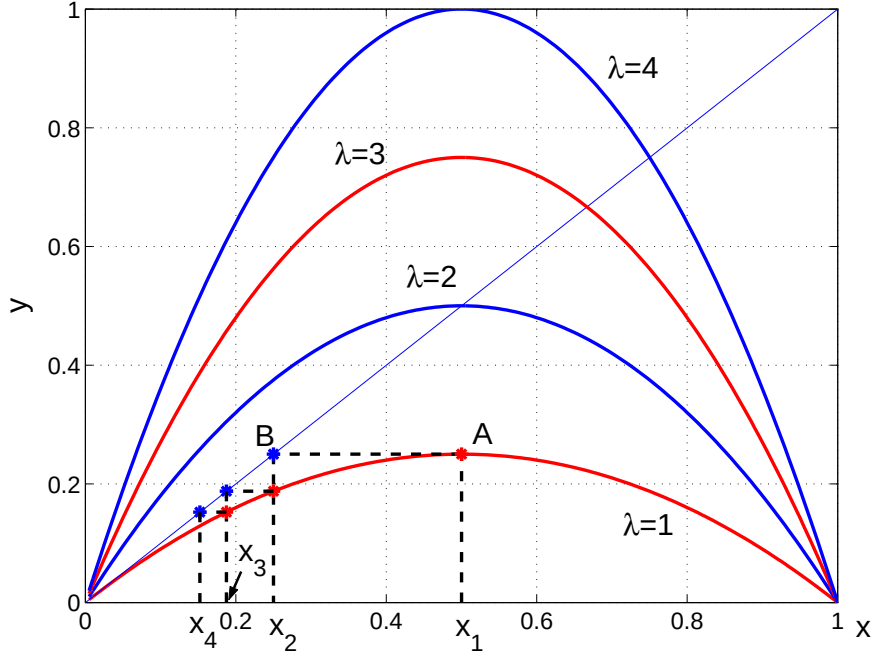


Рис. 1: Однопараметрическое семейство квадратичных отображений $f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$ на единичном отрезке. При $\lambda = 1$ единственная неподвижная точка $x^* = 0$ является устойчивой

по-другому: x_n стремится к постоянному значению $x^* > 0$ (см., например, Рис. 2). В применении к исходной биологической задаче это означает, что численность такого вида по прошествии нескольких лет стабилизируется и мало меняется во времени, приближаясь к равновесному значению.

Значение x^* определяется из уравнения

$$x^* = f(x^*, \lambda). \quad (4)$$

Все точки, удовлетворяющие этому уравнению, называются *неподвижными точками* отображения (1), так как $x_n = x^*$ при любом n , если $x_1 = x^*$. При $\lambda < 1$ квадратное уравнение $x^* = \lambda x^*(1 - x^*)$ имеет один неотрицательный корень $x^* = 0$. При $\lambda > 1$ неотрицательных корней два: $x^* = 0$ и $x^* = (\lambda - 1)/\lambda$. При $\lambda = 1$ неподвижная точка $x^* = 0$ теряет устойчивость, а вновь появившаяся точка становится устойчивой.

Нетрудно определить, будет ли устойчивой неподвижная точка x^* отображения $f(x)$. Пусть $x_n = x^* + \Delta x_n$, где Δx_n – малое число. Если точка устойчива, то с ростом n величина $|\Delta x_n|$ должна уменьшаться. Зафиксируем λ и перепишем формулу (1) в виде

$$x^* + \Delta x_{n+1} = f(x^* + \Delta x_n) \approx f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx} \cdot \Delta x_n.$$

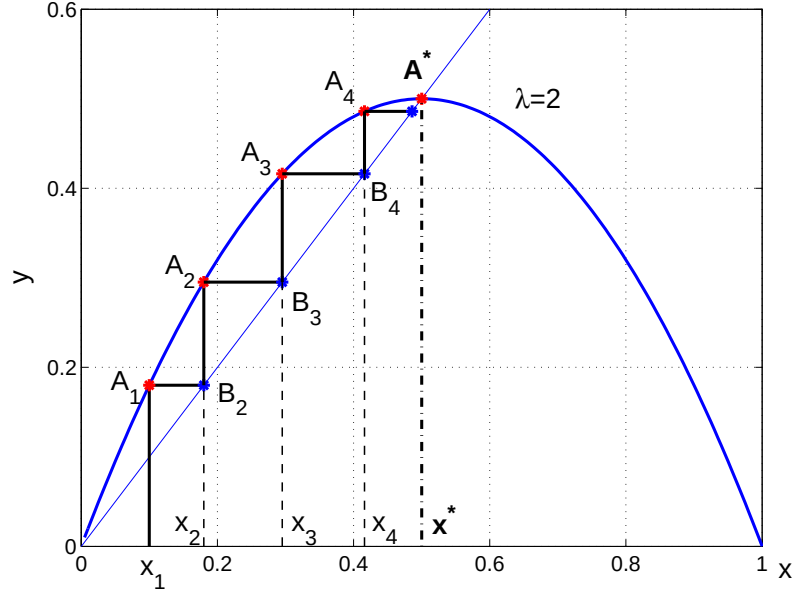


Рис. 2: Квадратичное отображение $f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$ при $\lambda = 2$. Неподвижная точка $x^* = 0.5$ является устойчивой, а $x^* = 0$ неустойчива

При анализе устойчивости особых точек систем обыкновенных дифференциальных уравнений в невырожденном случае все определяется линейными членами (первый метод Ляпунова в теории устойчивости). Проводя здесь аналогичные рассуждения, можно убедиться, что устойчивость точки x^* определяется поведением линейного отображения

$$\Delta x_{n+1} = \frac{df(x^*)}{dx} \cdot \Delta x_n. \quad (5)$$

Для того, чтобы $\Delta x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, должно выполняться неравенство

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx} \right| < 1. \quad (6)$$

Это и есть достаточное условие устойчивости неподвижной точки x^* . Если выполнено противоположное неравенство, то можно утверждать, что точка x^* будет неустойчива. Если модуль производной равен 1, то нужно рассматривать следующие члены ряда Тейлора для $f(x^* + \Delta x_n)$.

Будем дальше увеличивать параметр λ . Поведение системы снова изменится: при $\lambda > 3$ в последовательности $\{x_n\}$, начиная с достаточно больших n будут чередоваться два числа a_1 и a_2 . Точнее говоря, последовательность $\{x_n\}$ устроена так, что $x_{2n+1} \rightarrow a_1$, а $x_{2n} \rightarrow a_2$ при $n \rightarrow \infty$. Эти числа связаны соотношением $a_1 = f(a_2)$, а $a_2 = f(a_1)$. Будем говорить, что в этом случае логистическое отображение (3) имеет устойчивый цикл с периодом 2,

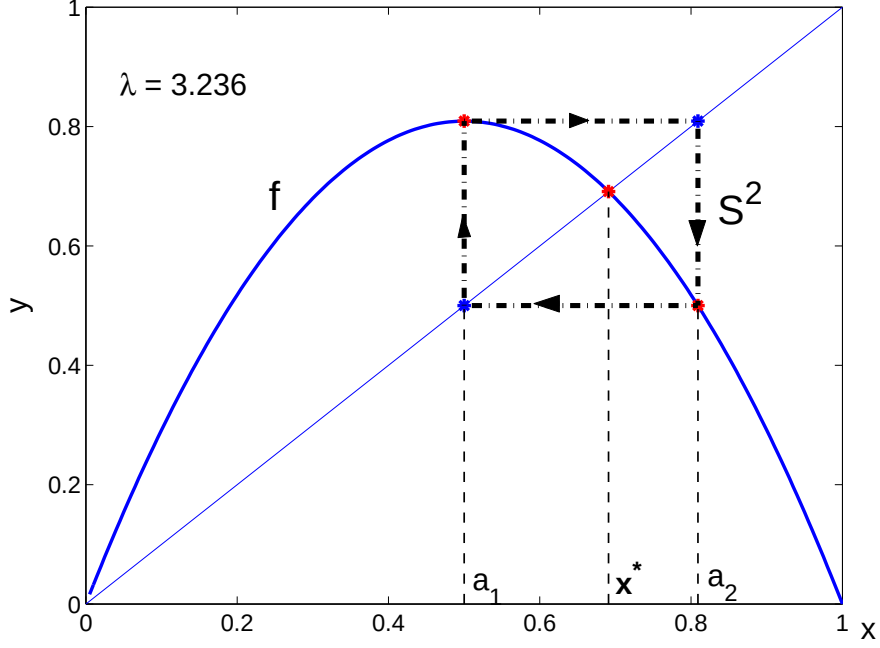


Рис. 3: Квадратичное отображение $f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$ при $\lambda = 1 + \sqrt{5}$. Цикл S^2 : $a_1 = 0.5000235$, $a_2 = 0.8090234$. Неподвижная точка $x^* = \frac{\lambda-1}{\lambda} \approx 0.691$

и обозначим его S^2 . Рис. 3 показывает, как выглядит цикл S^2 на графике. Координаты точек цикла S^2 определяются формулой

$$a_{1,2} = \frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}.$$

Переход от неподвижной точки (ее можно считать циклом S^1) к циклу S^2 произошел в результате бифуркации, которая получила название *бифуркация удвоения периода*. Точка x^* при этом не исчезла, однако величина $\frac{df(x^*)}{dx}$ стала меньше, чем -1.

При дальнейшем увеличении λ последовательность $\{x_n\}$ опять изменяется. При $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ происходит вторая бифуркация удвоения периода. Возникает цикл S^4 (см., например, Рис. 4), такой что

$$a_2 = f(a_1), \quad a_3 = f(a_2), \quad a_4 = f(a_3), \quad a_1 = f(a_4),$$

в окрестности которого последовательности точек x_m при $m \rightarrow \infty$ удовлетворяют условиям:

$$x_{4m} \rightarrow a_1, \quad x_{4m+1} \rightarrow a_2, \quad x_{4m+2} \rightarrow a_3, \quad x_{4m+3} \rightarrow a_4.$$

Увеличивая далее значения параметра λ , мы получим циклы S^8 , S^{16} , S^{32} и так далее. При этом каждый раз цикл S^{2^p} теряет устойчивость, происходит

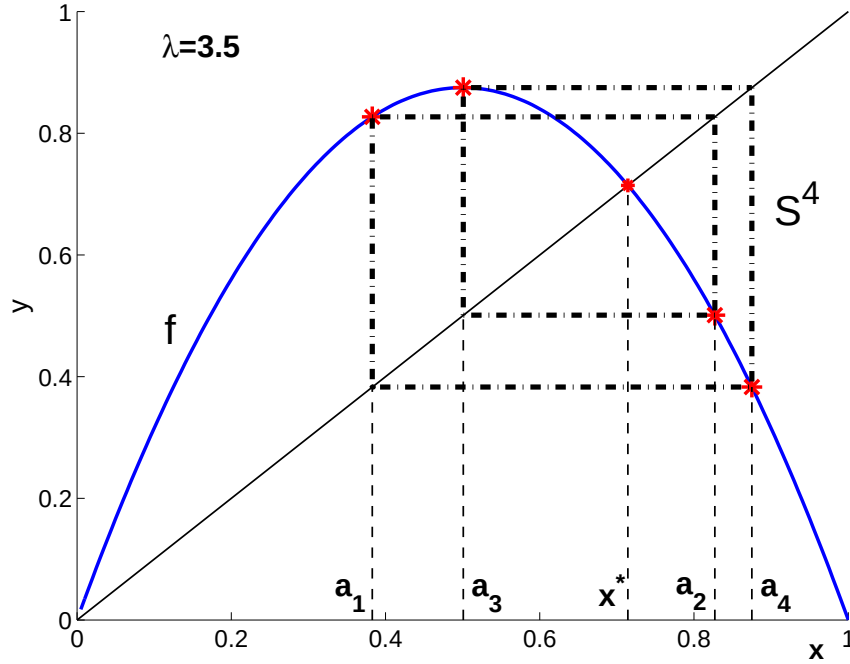


Рис. 4: Квадратичное отображение $f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$ при $\lambda = 3.5$. Цикл S^4 : $a_1 = 0.38282$, $a_2 = 0.82694$, $a_3 = 0.50089$, $a_4 = 0.87500$. Неподвижная точка $x^* = 0.71429$

бифуркация удвоения периода, и устойчивым становится цикл $S^{2^{p+1}}$. Наконец, при некотором значении λ (его иногда обозначают как λ_∞) формула (3) дает уже непериодическую последовательность $\{x_n\}$.

Наблюдаемая картина оказывается очень интересной. Во-первых, в поразительно простой модели (1) заложено очень сложное поведение. Во-вторых, в ней удастся проследить большое количество бифуркаций, приводящих к усложнению решения. Сделать это в более сложных моделях динамических систем гораздо труднее. В-третьих, при каждом значении $\lambda \in (0, \lambda_\infty)$ существует единственный устойчивый цикл, период которого равен 2^p и p зависит от λ . Хотелось бы понять, чем это вызвано, и изучить поведение модели более подробно.

Бифуркация удвоения периода

Наряду с отображением (1), удобно рассмотреть отображение

$$x_{n+1} = f(f(x_n)) \equiv f^2(x_n). \quad (7)$$

В наших лекциях об одномерных отображениях $f^n(x)$ всегда будет соответствовать n -й итерации функции f . В случае $f(x) = \lambda x(1 - x)$ вид функции $f^2(x)$ показан на Рис. 5-6 для $\lambda = 2.8$ и $1 + \sqrt{5}$. Здесь $f^2(x) = f(y)$, где

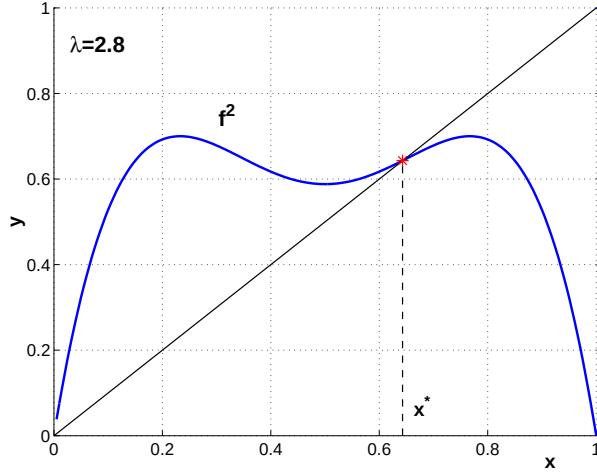


Рис. 5: Устойчивая неподвижная точка

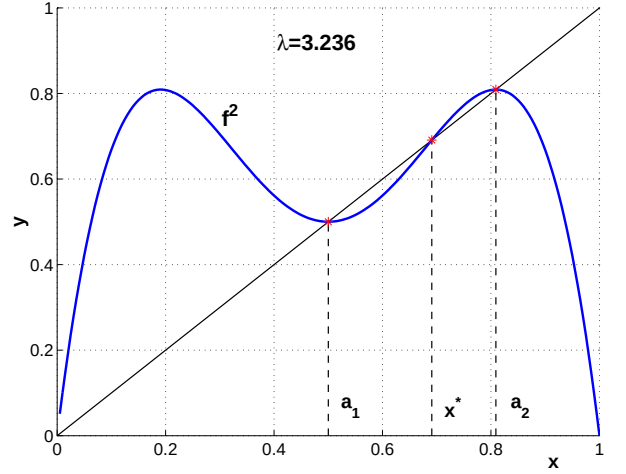


Рис. 6: Устойчивый цикл S^2

$y = f(x)$, то есть

$$f^2(x) = \lambda \cdot [\lambda x(1 - x)] \cdot [1 - \lambda x(1 - x)].$$

Рис. 5 соответствует устойчивой неподвижной точке при $\lambda < 3$, Рис. 6 – устойчивому циклу S^2 при $\lambda > 3$. График $f^2(x)$ пересекается с прямой $y = x$ во всех неподвижных точках отображения $f(x)$, а также в точках, принадлежащих циклам S^2 , потому что

$$a_2 = f(a_1) = f(f(a_2)), \quad a_1 = f(a_2) = f(f(a_1)).$$

Увеличивая параметр λ , мы растягиваем функцию $f^2(x)$ вдоль оси y . И если при некотором значении λ линии $y = x$ и $y = f^2(x)$ пересекаются в одной точке (см. Рис. 5), то с увеличением λ могут появиться еще две точки пересечения (см. Рис. 6). Они-то и будут определять цикл S^2 . Переход $S^1 \rightarrow S^2$ в отображении $f(x)$ обусловлен тем, что одна из неподвижных точек отображения $f^2(x)$ теряет устойчивость, и в ее окрестности появляются две новые устойчивые неподвижные точки. Рассматривая функции $f^4(x)$, $f^8(x)$ и т.д., можно увидеть, как происходят следующие удвоения. В каждом из этих случаев одна точка теряет устойчивость, и появляются две другие устойчивые точки, поэтому период цикла удваивается. При этом возникновение устойчивого цикла периода 4 у отображения $x_{n+1} = f(x_n)$ связано с появлением двух устойчивых циклов у отображения f^2 и четырех неподвижных точек у f^4 .

Действуя так же, как в случае неподвижной точки, можно показать, что устойчивость цикла S^P с элементами $x_1, \dots, x_P$ будет определяться формулой

$$\left| \frac{df^P(x_k)}{dx} \right| < 1, \quad k = 1, \dots, P. \quad (8)$$

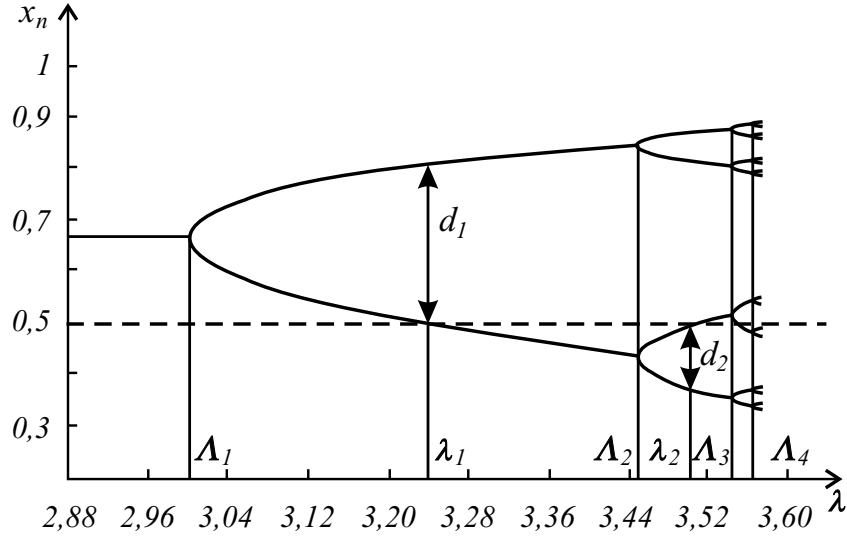


Рис. 7: Бифуркационная диаграмма для логистического отображения $x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$, где $f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$

Продифференцировав функцию $f^P(x)$, легко убедиться, что условие (8) эквивалентно неравенству

$$\left| \frac{df(x_1)}{dx} \times \dots \times \frac{df(x_P)}{dx} \right| < 1, \quad (9)$$

которое не зависит от номера k точки цикла S^P . Из этой формулы следует, что величина $\left| \frac{df^P}{dx} \right|$ будет одной и той же во всех точках цикла S^P .

Константы Фейгенбаума

Оказалось, что на примере модели (3) удастся понять не только качественные, но и количественные закономерности возникновения хаоса. Чтобы проследить за ними, построим график $x(\lambda)$. По оси x будем откладывать координаты точек $x_1, x_2, \dots, x_P$, лежащих на устойчивом цикле, по оси λ – значения параметра. Циклу S^2 будут соответствовать две точки на одной вертикали, циклу S^4 – четыре, и т.д. Обозначим через $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots$ те значения параметра λ , в которых происходили бифуркации удвоения периода, а через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ – значения параметра, при которых $x = 1/2$ является элементом цикла S^2, S^4, S^8 , и т.д. (такие циклы называются *суперциклами*). Введем также величины $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$, равные расстоянию между $x = 1/2$ и ближайшим к нему элементом цикла S^{2^n} при $\lambda = \lambda_n$. Все эти обозначения пояснены на Рис. 7.

Расчеты, проведенные на компьютере, показали, что бифуркационные значения Λ_n при больших n ведут себя как геометрическая прогрессия. Ее зна-

менатель равен $\delta = 4.6692016\dots$. Другими словами,

$$\frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}} \longrightarrow \delta, \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Отношение d_n/d_{n+1} также имеет предел, равный α , где $\alpha = 2.5029078\dots$. Параметры α и δ являются универсальными и называются *константами Фейгенбаума*.

Производная Шварца

Мы использовали в рассуждениях достаточно общие свойства одномерного отображения $x = f(x, \lambda)$, непрерывно дифференцируемого отображения единичного интервала $[0, 1]$ в себя, которое имеет один максимум при $x = 1/2$ и монотонно при $0 \leq x \leq 1/2$ и $1/2 < x \leq 1$. Заметим, что непрерывное отображение $x = f(x, \lambda)$ единичного отрезка $I = [0, 1]$ в себя, такое что интервал I распадается на два интервала I_1 и I_2 , на каждом из которых отображение f является гомеоморфизмом, причем на одном интервале $f(x)$ монотонно возрастает, а на другом убывает, – такое f называется *унимодальным отображением*.

Добавим в качестве предостережения, что бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода, которую мы наблюдали для логистического отображения, происходит не для всех унимодальных отображений. Необходимо, чтобы *производная Шварца* (или *шварциан*) отображения f

$$Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \sim \frac{d^2}{dx^2} [f^{(x)}]^{-1/2} \quad (11)$$

была отрицательна на всем интервале $[0, 1]$.

Это справедливо, например, для рассмотренного нами квадратичного отображения $f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$. Действительно, $f'''(x) \equiv 0$.

Чтобы показать правдоподобность этого необычного, на первый взгляд, требования, отметим сначала, что из условия $Sf < 0$ следует $Sf^n < 0$ для всех итераций f . Это можно проверить прямым вычислением, так как для двух гладких отображений f и g справедлива формула

$$S(f \circ g) = Sf(g) \cdot (g')^2 + Sg.$$

Рассмотрим первую бифуркацию удвоения периода при $\lambda = \lambda^*$. Допустим, в точке x_0 – неустойчивой неподвижной точке отображения $f(x)$ – выполнено условие

$$f'(x_0) = -1.$$

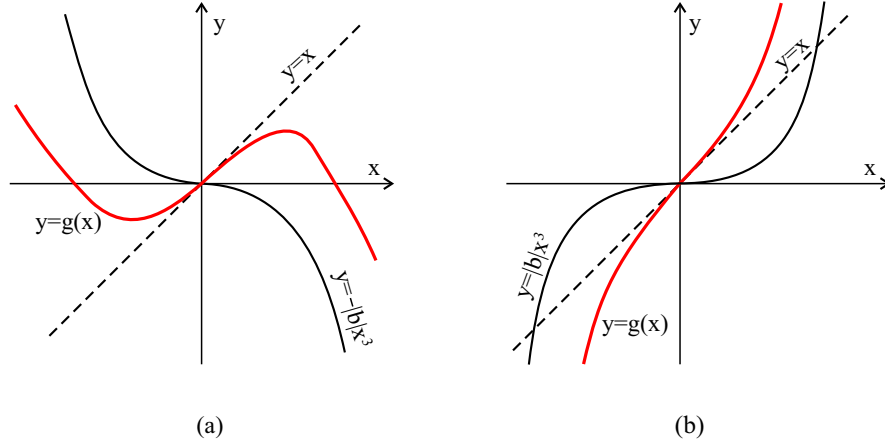


Рис. 8: График функции $g(x) = x + bx^3$ для b отрицательного (a) и положительного (b)

Тогда в окрестности точки x_0 рассмотрим $f^2(x) = f(f(x))$ и вычислим производные от $f^2(x)$:

$$\begin{aligned} [f^2(x)]' &= f'(f(x)) \cdot f'(x), \\ [f^2(x)]'' &= [f'(f(x)) \cdot f'(x)]' = f''(f(x)) \cdot [f'(x)]^2 + f'(f(x)) \cdot f''(x), \\ [f^2(x)]''' &= f'''(f(x)) [f'(x)]^3 + 3f''(f(x)) f''(f(x)) f'(x) + f'(f(x)) f'''(x). \end{aligned}$$

В неподвижной точке x_0 отображения f выполнены соотношения

$$\begin{aligned} [f^2(x_0)]' &= 1, \\ [f^2(x_0)]'' &= 0, \\ [f^2(x_0)]''' &= 2 \left[\frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} \right)^2 \right], \end{aligned} \tag{12}$$

то есть знак третьей производной в точке x_0 определяется знаком производной Шварца $Sf(x_0)$ (11).

Рассмотрим график функции, аппроксимирующей $f^2(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$g(x) = f^2(x_0) + (f^2)'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} (f^2)''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} (f^2)'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3.$$

Для простоты изложения, перенесем точку $(x_0, f^2(x_0))$ в начало координат, сохранив обозначения для x и g . Учитывая соотношения (12), получаем $g(x) = x + bx^3$, где $b = 1/3! (f^2)'''(0)$. Графики функции $g(x)$ для $b < 0$ и $b > 0$ показаны на Рис. 8. Если предположить, что с увеличением λ значение $|g(x)|$ возрастает, то в случае $b < 0$ мы можем получить бифуркацию рождения еще

двух стационарных точек отображения g и, следовательно, f^2 , что означает бифуркацию удвоения периода для отображения f . В случае же $b > 0$, то есть $Sf > 0$, удвоение периода невозможно.

Этот пример говорит о том, что шварциан может быть полезным инструментом в теории динамических систем: условие $Sf(x) < 0$ на интервале I является необходимым для получения бифуркации удвоения периода у унимодального отображения $f(x)$. Унимодальное отображение с $Sf < 0$ не может иметь более одного периодического аттрактора и в этом случае все точки отрезка $[0, 1]$ (за исключением множества меры нуль) притягиваются к этому аттрактору.