

Лекция 5

Линейные и нелинейные отображения

Мы видели, что линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax \quad (1)$$

порождает поток, задаваемый отображением $e^{tA} : R^n \rightarrow R^n$, когда A – матрица $n \times n$. Для фиксированного $t = \tau$ положим $e^{\tau A} = B$. Тогда матрица B постоянна, и разностное уравнение

$$x_{n+1} = Bx_n \quad (2)$$

представляет собой дискретную динамическую систему, полученную из потока e^{tA} (1) при отображении

$$x \rightarrow Bx.$$

Точно так же нелинейная система

$$\dot{x} = f(x) \quad (3)$$

и ее поток φ_t порождают нелинейное отображение

$$x_{n+1} = G(x_n) \quad (4)$$

или

$$x \rightarrow G(x),$$

где $G = \varphi_\tau$ – нелинейная векторнозначная функция. Если поток φ_τ гладкий (скажем, r раз непрерывно дифференцируемый), то G – гладкое отображение, имеющее гладкое обратное, т.е. диффеоморфизм. Это один из примеров того, как непрерывный поток порождает дискретное отображение. Более важный пример, отображение Пуанкаре, будет рассмотрен в следующих лекциях.

Диффеоморфизмы или дискретные динамические системы представляют самостоятельный научный интерес. Особое внимание мы будем уделять необратимым отображениям таким, как

$$x \rightarrow x - x^2. \quad (5)$$

Задача 1: Покажите, что отображение $(x, y) \rightarrow (y, bx + dy - y^3)$ является диффеоморфизмом для $b \neq 0$ и вычислите обратное.

Орбита линейного отображения $x \rightarrow Bx$ представляет собой последовательность точек $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, определенную формулой $x_{i+1} = Bx_i$. Любая начальная точка порождает единственную орбиту при условии, что B не имеет нулевых собственных значений.

Мы определим *устойчивое*, *неустойчивое* и *центральное* подпространства по аналогии с линейными векторными полями:

$E^s = \text{span}\{n_s \text{ собственных (присоединенных) векторов с собственными значениями } \lambda_m: |\lambda_m| < 1\},$

$E^u = \text{span}\{n_u \text{ собственных (присоединенных) векторов с собственными значениями } \lambda_l: |\lambda_l| > 1\},$

$E^c = \text{span}\{n_c \text{ собственных (присоединенных) векторов с собственными значениями } \lambda_k: |\lambda_k| = 1\}.$

Орбиты на E^s и E^u характеризуются, соответственно, сжатием и растяжением. В отсутствии кратных собственных значений сжатие и растяжение ограничены геометрическими прогрессиями: существуют постоянные $c > 0$ и $\alpha < 1$ такие, что для $n \geq 0$

$$|x_n| \leq c \alpha^n |x_0|, \quad x_0 \in E^s, \quad (6)$$

$$|x_{-n}| \leq c \alpha^n |x_0|, \quad x_0 \in E^u. \quad (7)$$

Если имеются кратные собственные значения, тогда, как и в случае потоков, сжатие (или растяжение) не обязательно будет экспоненциальным, что иллюстрирует Задача 2. Тем не менее, экспоненциальная оценка по-прежнему может быть построена, если $|\lambda_j| < 1$ для всех собственных значений.

Задача 2. Вычислите орбиты для отображений

$$x \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} x, \quad x \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

и изобразите их схематически на плоскости. Покажите, что точка $(0, 0)$ асимптотически устойчива в первом случае и неустойчива во втором случае, хотя $|\lambda| = 1$.

Несмотря на проблемы, обусловленные кратностью, при отсутствии у матрицы B собственных значений, по модулю равных единице, знание собственных значений достаточно для вывода об устойчивости. В

этом случае $(0,0)$ называют *гиперболической* неподвижной точкой. Вообще, если x_s – неподвижная точка отображения G , то есть $G(x_s) = x_s$ и $G_x(x_s)$ не имеет собственных значений, равных по модулю единице, то x_s называется *гиперболической* неподвижной точкой.

Существует теория диффеоморфизмов, параллельная теории потоков. В частности, теорема о линеаризации и результаты об инвариантных многообразиях применимы к отображениям точно так же, как к потокам.

Теорема 1. Пусть $G : R^n \rightarrow R^n$ – $(\mathbf{C}^1)$ -диффеоморфизм с гиперболической неподвижной точкой x_s . Тогда существует гомеоморфизм h , определенный в некоторой окрестности U точки x_s , такой что

$$h(G(\xi)) = G_x(x_s) \cdot h(\xi)$$

для всех $\xi \in U$.

Теорема 2. (об устойчивом многообразии неподвижной точки)

Пусть $G : R^n \rightarrow R^n$ – $(\mathbf{C}^1)$ -диффеоморфизм с гиперболической неподвижной точкой x_s . Тогда существуют локальное устойчивое и неустойчивое многообразия $W_{loc}^s(x_s)$ и $W_{loc}^u(x_s)$, касающиеся в точке x_s собственных подпространств E^s и E^u отображения $G_x(x_s)$ и имеющие соответствующие размерности. Многообразия W_{loc}^s и W_{loc}^u имеют ту же гладкость, что и отображение G .

Локальные устойчивое и неустойчивое многообразия определяются следующим образом:

$$W_{loc}^s(x_s) = \left\{ x \in U : \lim_{n \rightarrow +\infty} G^n(x) = x_s, \quad G^n(x) \in U \quad \forall n \geq 0 \right\},$$

$$W_{loc}^u(x_s) = \left\{ x \in U : \lim_{n \rightarrow +\infty} G^{-n}(x) = x_s, \quad G^{-n}(x) \in U \quad \forall n \geq 0 \right\}.$$

Глобальные устойчивое и неустойчивое многообразия определяются так же, как для потоков, путем объединения последовательных прообразов и образов локальных многообразий:

$$W^s(x_s) = \bigcup_{n \geq 0} G^{-n}(W_{loc}^s(x_s)), \quad W^u(x_s) = \bigcup_{n \geq 0} G^n(W_{loc}^u(x_s)).$$

Следует помнить, что потоки и отображения имеют принципиальное различие: если *орбита* или *траектория потока* $\varphi_t(p)$ представляет со-

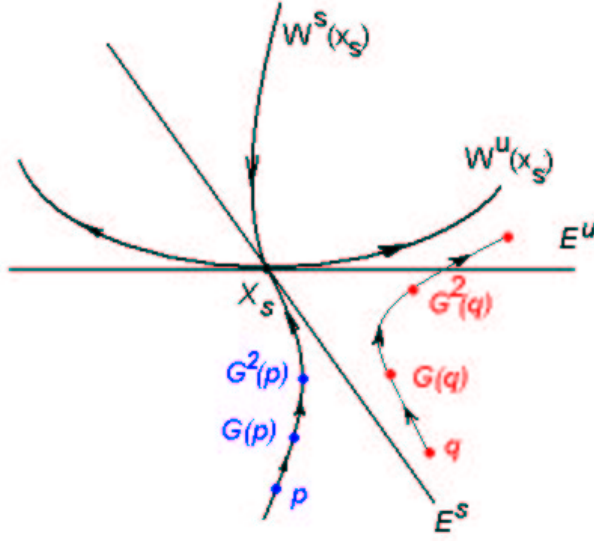


Рис. 1: Инвариантные многообразия и орбиты отображения $G : R^n \rightarrow R^n$

бой кривую в R^n , то орбита отображения $\{G^n(p)\}$ – это последовательность точек. Таким образом, если инвариантные многообразия потоков состоят из объединения фазовых кривых, то в случае отображений они являются объединениями орбит, состоящих из дискретных точек (см. Рис. 1). Это различие окажется важным позднее, при обсуждении глобального поведения (динамики) системы.

Заметим, что запись $G^2(p)$ означает $G(G(p))$, аналогично $G^n(p)$ означает n -ю итерацию точки p при отображении G . Таким образом, если имеется цикл из k различных точек $p_j = G^j(p_0)$, $j = 0, \dots, k-1$, и $G^k(p_0) = p_0$, то он образует *периодическую орбиту* периода k . Устойчивость такой орбиты определяется линеаризованным отображением $G_x^k(p_0)$, или, равносильно, $G_x^k(p_j)$ для любого j . В силу цепного правила дифференцирования, мы имеем

$$G_x^k(p_0) = G_x(G^{k-1}(p_0)) \cdot \dots \cdot G_x(G(p_0)) \cdot G_x(p_0).$$

Как и для потоков, поведение линейного отображения (2) определяется собственными значениями и собственными (присоединенными) векторами матрицы B .

Поскольку в курсах по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний редко обсуждаются отображения, мы рассмотрим некоторые детали более подробно. Для одномерного отображения, когда $n = 1$ и $B = b$ есть скаляр, а орбита точки $\{p_j\}_{j=0}^\infty$ задается просто геометрической прогрессией $p_j = b^j p_0$, существует 4 "общих"

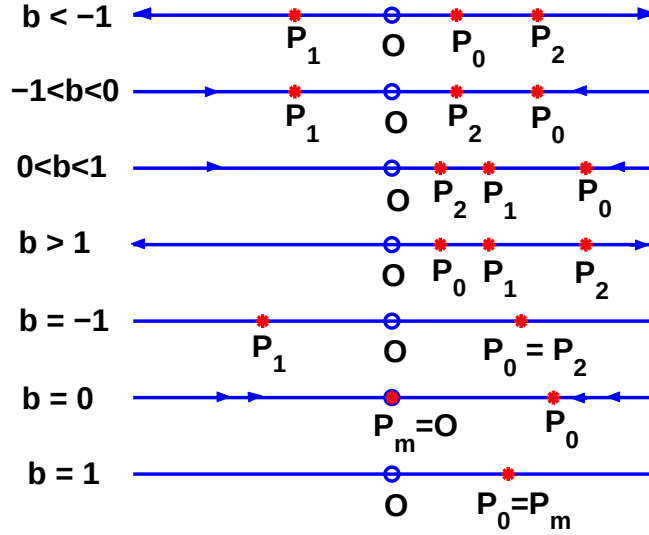


Рис. 2: Поведение линейного отображения $x \rightarrow bx$

случая и 3 "необычных", перечисленных в Таблице 1 и показанных на Рис. 2. Случаи 5 и 7 соответствуют $|b| = 1$, случай 6 – отображение (2) вырождено, а случаи 1–4 регулярные, $|b| < 1$ или $|b| > 1$. Далее мы сформулируем точнее, что обозначают эти термины.

Таблица 1. Поведение линейного отображения $x \rightarrow bx$

Случай	Описание
1. $b < -1$	Источник с переменной ориентацией
2. $-1 < b < 0$	Сток с переменной ориентации
3. $0 < b < 1$	Сток, сохраняющий ориентацию
4. $b > 1$	Источник, сохраняющий ориентацию
5. $b = -1$	Ориентация меняется, все точки периода 2
6. $b = 0$	Все точки переходят в 0 при первой итерации, отображение необратимое
7. $b = 1$	Ориентация сохраняется, все точки – неподвижные

Вообще говоря, для $n \geq 1$ тип устойчивости неподвижной точки $x = 0$ определяется абсолютной величиной собственных значений матрицы B :

- Если для всех собственных значений $|\lambda_j| < 1$, то мы имеем *сток*, то есть устойчивую неподвижную точку.
- Если $|\lambda_j| > 1$ для некоторых собственных значений и $|\lambda_i| < 1$ для других, то точка *седловая*.

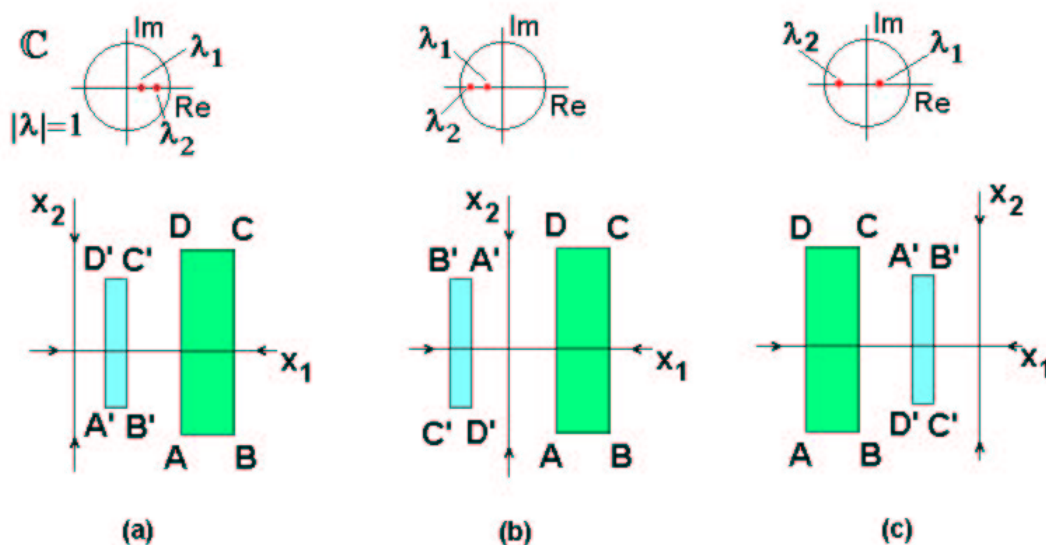


Рис. 3: Сохраняющие ориентацию (a), (b) и меняющее ориентацию (c) линейные отображения на плоскости (x_1, x_2)

- Если же $|\lambda_j| > 1$ для всех собственных значений, то неподвижная точка – *источник*.
- Если для некоторых собственных значений $|\lambda_j| = 1$, то в направлениях v_j , соответствующих этим собственным значениям, норма сохраняется (если только эти значения не являются кратными, с нетривиальными жордановыми блоками).

Задача 3. Разработайте схематическую классификацию, подобную Таблице 1, для двумерного отображения $x \rightarrow Bx$, где

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

В основу классификации положите собственные значения матрицы B .

Если четное число собственных значений имеют отрицательные вещественные части, то отображение $x \rightarrow Bx$ *сохраняет ориентацию*, а при наличии нечетного числа собственных значений с отрицательной вещественной частью оно *изменяет ориентацию*. На Рис. 3 показаны сохраняющие ориентацию (a), (b) и меняющее ориентацию (c) линейные отображения

$$x \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x.$$

Положения собственных значений относительно единичной окружности на комплексной плоскости показаны в верхней части рисунков. В каждом из случаев ориентированный четырехугольник ABCD отображается в A'B'C'D'.

Для того чтобы почувствовать богатство и сложность возможного поведения нелинейных отображений, можно поэкспериментировать со следующими двумя примерами.

Задача 4. Сколько неподвижных и периодических точек Вы сможете найти для следующего одномерного отображения и двумерного диффеоморфизма? Обсудите их устойчивость. Параметр μ изменяйте в указанных границах.

$$\begin{aligned} (a) \quad & x \rightarrow \mu x(1-x), \quad \mu \in [0, 4], \\ (b) \quad & (x, y) \rightarrow (y, -0.5x + \mu y - y^3), \quad \mu \in [2, 4]. \end{aligned}$$

Можете ли Вы найти бифуркационное значение параметра, при которых возникают новые периодические точки?

В качестве заключительного примера двумерного отображения с довольно сложной динамикой рассмотрим простое линейное отображение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (x, y) \in T^2 = R^2/Z^2. \quad (8)$$

Фазовым пространством является двумерный тор T^2 , полученный путём отождествления точек, координаты которых отличаются на целые числа. При этом каждому числу вида $m + a$, где m – целое и $0 \leq a < 1$, ставится в соответствие a – его дробная часть. Отображение определено корректно на T^2 , поскольку оно сохраняет периодическую решетку. Любая точка единичного квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, которая при итерациях отображения (8) попадает в другой квадрат, перемещается назад в исходный квадрат. Например, если $(x, y) = (-1.4, +1.2)$ то мы устанавливаем $(x, y) = (0.6, 0.2)$.

На плоскости (накрывающем пространстве) отображение (8) имеет неподвижную седловую точку $(0, 0)$ в начале координат с собственными векторами

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ (1 + \sqrt{5})/2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ (1 - \sqrt{5})/2 \end{bmatrix},$$

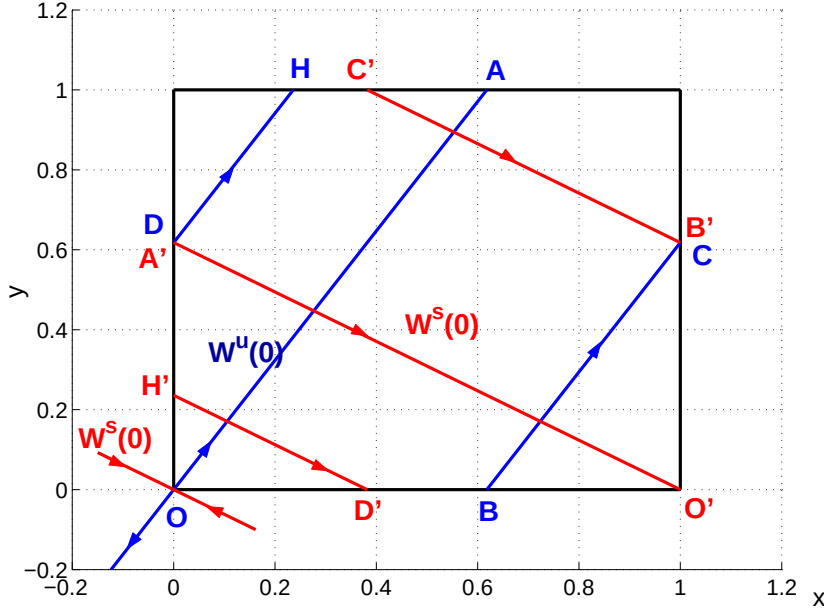


Рис. 4: Линейное отображение (8) на торе (гиперболический торический автоморфизм) как отображение на накрывающем пространстве R^2

отвечающими собственным значениям $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2$ и $\lambda_2 = (3 - \sqrt{5})/2$. Отметим, что одно из собственных значений лежит вне единичного круга, а второе – внутри него. Так как отображение линейно, то глобальное неустойчивое многообразие и неустойчивое подпространство совпадают: $W^u(0) = E^u$. То же самое справедливо для $W^s(0)$ и E^s . Поэтому $E^u = \text{span}\{v_1\}$ представляет собой неустойчивое многообразие неподвижной точки, а $E^s = \text{span}\{v_2\}$ – устойчивое многообразие.

Таким образом, неустойчивое многообразие "выходит из единичного квадрата" в точке $A = ((\sqrt{5} - 1)/2, 1)$ на верхней границе квадрата и возникает вновь с тем же угловым коэффициентом в точке $B = ((\sqrt{5} - 1)/2, 0)$ на нижней границе, затем выходит через правую границу в точке $C = (1, (\sqrt{5} - 1)/2)$ и т.д.

Поскольку угловые коэффициенты $(1 \pm \sqrt{5})/2$ многообразий W^u и W^s иррациональны, эти многообразия плотны на единичном квадрате (всюду плотно обматывают тор). Таким образом, каждое из многообразий $W^s(0)$ и $W^u(0)$ приближается само к себе произвольно близко! Более того, существует бесконечно много точек пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий.

Задача 5. Покажите, что отображение (8) имеет счётное множество периодических точек и что множество таких точек плотно в T^2 . (Сначала

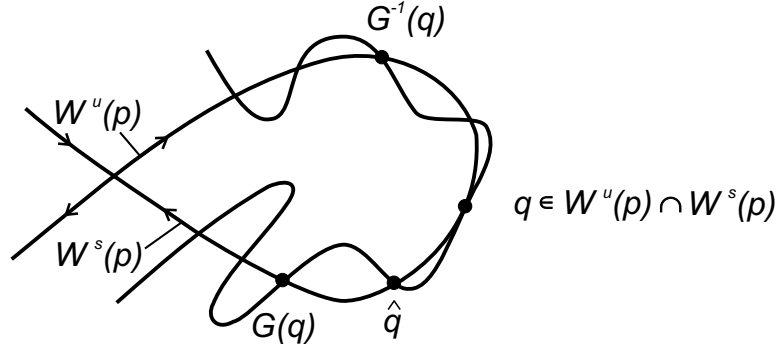


Рис. 5: Гомоклинические орбиты

покажите, что $\bar{x}$ – периодична тогда и только тогда, когда обе компоненты $\bar{x}$ – рациональные числа с одинаковыми знаменателями.)

Задача 6. Опишите множество $\Lambda = W^s(0) \cap W^u(0)$, лежащее в пересечении инвариантных многообразий линейного отображения на торе. Какой вывод, по вашему мнению, можно сделать отсюда о структуре "типичной орбиты"?

Точка $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$, отличная от p , называется *гомоклинической*. Довольно легко увидеть, что если существует одна такая точка, то должно существовать бесконечное множество *гомоклинических* точек. Действительно, $G^n(q) \rightarrow p$ при $n \rightarrow \pm\infty$, и эта сходимость для малых значений $|q - p|$ описывается линейной системой. Более того, если отображение сохраняет ориентацию (что справедливо для отображения Пуанкаре), то между двумя гомоклиническими точками q и $G(q)$ должна располагаться еще хотя бы одна точка из $W^s(p) \cap W^u(p)$ (обозначенная $\hat{q}$ на Рис. 5). Орбита $\{G^n(q)\}$ точки q называется *гомоклинической орбитой*. Она играет важную роль в глобальной динамике отображения.

В частности, весьма извилистый характер глобальных многообразий $W^u(p)$ и $W^s(p)$ в окрестности точки p обуславливает чувствительную зависимость орбиты $\{G^n(x_0)\}$ от начального условия x_0 , поэтому наличие гомоклинических орбит ведет к хаотическому поведению.

Если в некоторой точке v пересекаются устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(p_1)$ и $W^u(p_2)$ двух различных неподвижных точек, точка v и получающаяся в результате орбита называются *гетероклиническими*.

Этот пример может показаться довольно искусственным, но, как мы

увидим далее, многие интересные с физической точки зрения системы обладают подобными свойствами. В следующих лекциях мы увидим, что отображение Пуанкаре, являющееся нелинейным диффеоморфизмом на плоскости, может обладать седловой точкой, у которой устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально, то есть без касания.