

Лекция 4

Нелинейная система $\dot{x} = f(x)$.

Инвариантные многообразия и линеаризация

Напомним, что из основной теоремы о существовании и единственности решения ОДУ следует, что для гладких функций $f(x)$ решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad x_0 \in R^n, \quad (1)$$

определено, по крайней мере, в некоторой малой окрестности $t \in (-c, c)$ точки $t = 0$. Таким образом, *локальный* поток $\varphi_t : R^n \rightarrow R^n$ определяется формулой $\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$ по аналогии с линейным случаем, хотя, конечно, мы не можем дать общей формулы типа e^{tA} .

При изучении нелинейной системы $\dot{x} = f(x)$ прежде всего следует отыскать *нули* функции f или *неподвижные точки* системы (1). Мы будем их также называть *положениями равновесия* или *стационарными решениями*.

Введем обозначения

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T.$$

Пусть x_s — неподвижная точка и $f(x_s) = 0$. Чтобы охарактеризовать поведение решений вблизи x_s , то есть для $x = x_s + y$ при $|y| \ll 1$, линеаризуем (1) в точке x_s , то есть перейдем к изучению линейной системы

$$\dot{y} = f_x(x_s) \cdot y, \quad y \in R^n, \quad (2)$$

где $f_x = (\partial f_i / \partial x_j)$ — матрица Якоби, составленная из частных производных первого порядка функции $f(x)$. Так как (2) является линейной системой с постоянными коэффициентами вида $\dot{y} = Ay$, где $A = f_x(x_s)$, то её можно легко исследовать, если найти матричную экспоненту e^{tA} , которая является линейной частью потока $\varphi_t(x)$ в окрестности x_s .

Математический вопрос о соответствии свойств нелинейной системы вблизи состояния равновесия и соответствующей линеаризованной системы был впервые поставлен в работах Пуанкаре и Ляпунова. Вопрос состоит в том, что мы можем сказать о решениях нелинейной системы (1), исходя из знания матричной экспоненты e^{tA} . Ответом являются два фундаментальных результата из теории динамических систем, приводимых ниже.

Теорема 1. Если матрица $A = f_x(x_s)$ не имеет нулевых или чисто мнимых собственных значений, то существует гомеоморфизм h , определенный в некоторой окрестности U точки x_s в R^n , локально переводящий орбиты нелинейного потока φ_t уравнения (1) в орбиты линейного потока e^{tA} уравнения (2). Этот гомеоморфизм сохраняет направление орбит и может быть выбран так, чтобы сохранить параметризацию при помощи времени.

Если $f_x(x_s)$ не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью, то x_s называется *гиперболической* или *грубой* неподвижной точкой, асимптотическое поведение решений вблизи неё и, следовательно, тип устойчивости определяются при линеаризации. Если существует собственное значение с нулевой вещественной частью, то вопрос об устойчивости нельзя решить по линейному приближению, как показывают следующие примеры.

Пример 1: Рассмотрим систему двух нелинейных ОДУ:

$$\dot{x}_1 = -\beta x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = \beta x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \quad (3)$$

Общее решение соответствующей линеаризованной в окрестности неподвижной точки $x_s = (0, 0)$ системы

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = B \cdot y \quad (4)$$

имеет вид

$$y_1 = y_1^0 \cos(\beta t) - y_2^0 \sin(\beta t), \quad y_2 = y_1^0 \sin(\beta t) + y_2^0 \cos(\beta t),$$

собственные значения матрицы B – комплексно-сопряженные чисто мнимые числа $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. Здесь фазовые траектории являются замкнутыми кривыми (концентрические окружности), в центре которых лежит начало координат. Такое состояние равновесия называется *центром* (см. Рис. 1а).

Фазовый портрет нелинейной системы значительно отличается. Действительно, общее решение системы (3) легко находится в полярных координатах $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$:

$$r^2 = \frac{1}{2t - r_0^{-2}}, \quad \varphi = \beta t + \varphi_0. \quad (5)$$

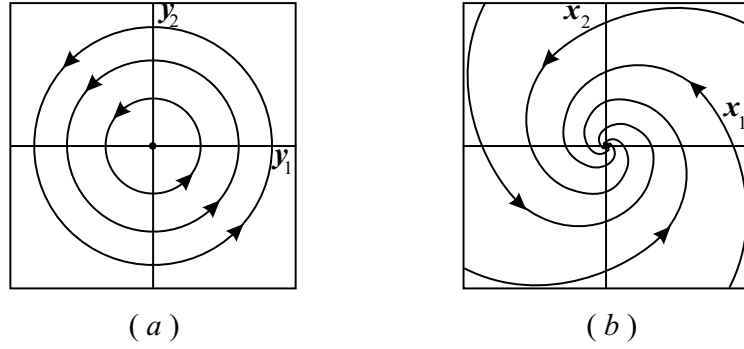


Рис. 1: Фазовые портреты: (a) – линейризованной системы (4) и (b) – нелинейной системы ОДУ (3)

В этом случае все траектории имеют форму спиралей, закрученных вокруг начала координат, как показано на Рис. 1b. Состояние равновесия исходной нелинейной системы является *устойчивым фокусом*. Очевидно, что в любой малой окрестности такого состояния равновесия не существует гомеоморфизма, при помощи которого траектории данной системы отображаются в траектории линейризованной системы, так как гомеоморфизм отображает замкнутые кривые в замкнутые. Таким образом, данная система нелинейных ОДУ (3) не являются топологически эквивалентной её линейризации (4).

Задача 1.

Проверьте, что (5) определяет решение нелинейной системы ОДУ (3).

Пример 2:

В этом примере состояние равновесия имеет одно собственное значение λ_1 , равное нулю, а второе $\lambda_2 = \lambda < 0$. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = x_1^2, \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2. \quad (6)$$

Решение линейризованной в окрестности неподвижной точки $x_s = (0, 0)$ системы

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

имеет вид $y_1 = y_1^0$, $y_2 = e^{\lambda t} y_2^0$.

На Рис. 2a ось y_1 целиком состоит из состояний равновесия линейризованной системы (7), каждое из которых притягивает только пару траекторий. На Рис. 2b показан фазовый портрет нелинейной системы

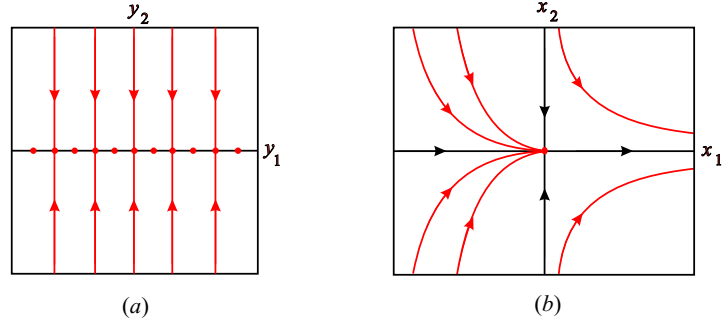


Рис. 2: Фазовые портреты: (a) – линейризованной системы (7) и (b) – нелинейной системы ОДУ (6)

(6). Из рисунков видно, что два локальных фазовых портрета не имеют ничего общего. Состояние равновесия, представленное на Рис. 2b, называется *седло-узлом*.

Прежде, чем сформулировать следующий результат, дадим два определения. Определим *локально устойчивое* и *неустойчивое* многообразия в точке x_s , $W_{loc}^s(x_s)$ и $W_{loc}^u(x_s)$, следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(x_s) &= \{x \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = x_s, \quad \varphi_t(x) \in U, \quad t \geq 0\}, \\ W_{loc}^u(x_s) &= \{x \in U : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) \rightarrow x_s, \quad \varphi_t(x) \in U, \quad t \leq 0\}, \end{aligned}$$

где $U \subset R^n$ - некоторая окрестность неподвижной точки x_s .

Инвариантные многообразия $W_{loc}^s(x_s)$ и $W_{loc}^u(x_s)$ являются нелинейными аналогами собственных подпространств E^s и E^u линейной системы ОДУ. Следующий результат говорит о том, что $W_{loc}^s(x_s)$ и $W_{loc}^u(x_s)$ касаются E^s и E^u в точке x_s (см. Рис. 3).

Теорема 2 (об устойчивом многообразии неподвижной точки).

Допустим, что уравнение $\dot{x} = f(x)$ имеет гиперболическую неподвижную точку x_s . Тогда существуют локально устойчивое и неустойчивое многообразия $W_{loc}^s(x_s)$ и $W_{loc}^u(x_s)$, имеющие те же размерности n_s и n_u , что и собственные подпространства E^s и E^u линейризованной системы $\dot{y} = f_x(x_s)y$, и касающиеся E^s и E^u в точке x_s . $W_{loc}^s(x_s)$ и $W_{loc}^u(x_s)$ имеют ту же гладкость, что и функция f .

Локально инвариантные многообразия $W_{loc}^s(x_s)$ и $W_{loc}^u(x_s)$ допускают глобальные аналоги W^s и W^u , получаемые путем отображения точек из W_{loc}^s вдоль фазового потока назад по времени и точек W_{loc}^u вперед по

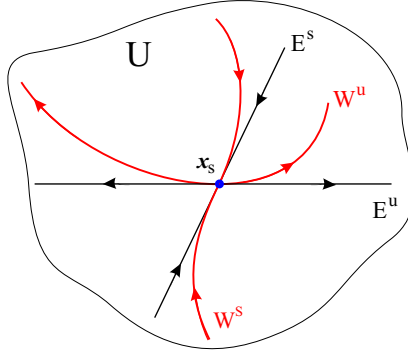


Рис. 3: Устойчивое W^s и неустойчивое W^u инвариантные многообразия нелинейной системы ОДУ $\dot{x} = f(x)$, устойчивое E^s и неустойчивое E^u подпространства линеаризованной системы ОДУ в окрестности неподвижной точки x_s

времени:

$$W^s(x_s) = \bigcup_{t \leq 0} \varphi_t(W_{loc}^s(x_s)), \quad W^u(x_s) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(W_{loc}^u(x_s)).$$

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (1) гарантирует, что два устойчивых (или неустойчивых) многообразия различных неподвижных точек x_s^1 и x_s^2 не могут пересекаться. Кроме того, $W_{loc}^s(x_s)$ и $W_{loc}^u(x_s)$ не имеют самопересечений. Тем не менее, пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий разных неподвижных точек или одной и той же неподвижной точки могут иметь место и, в действительности, являются источником многих сложностей, обнаруженных в поведении динамических систем.

Пример 3.

Для иллюстрации идей данного раздела рассмотрим простую нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2, \quad (8)$$

имеющую единственную неподвижную точку в начале координат. Для линеаризованной системы инвариантные подпространства определяются следующим образом:

$$E^s = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 = 0\}, \quad E^u = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 = 0\}. \quad (9)$$

Неподвижная точка $(0, 0)$ является седловой.

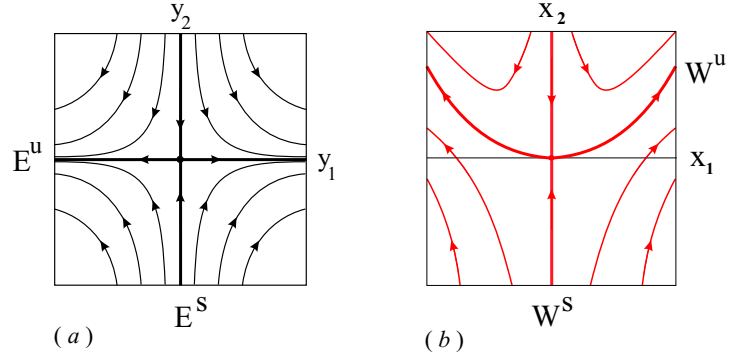


Рис. 4: Устойчивое и неустойчивое подпространства для линейной системы (a) и устойчивое и неустойчивое многообразие для нелинейной системы ОДУ (b)

В данном случае мы можем проинтегрировать нелинейную систему (8) аналитически. Перейдем на фазовую плоскость (x_1, x_2) и вместо того, чтобы получить решение в форме $(x_1(t), x_2(t))$, перепишем (8) как линейное уравнение первого порядка относительно $x_2(x_1)$ посредством исключения времени:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1} + x_1. \quad (10)$$

Интегрируя линейное неоднородное ОДУ (10), получим однопараметрическое семейство фазовых кривых

$$x_2(x_1) = \frac{x_1^2}{3} + \frac{c}{x_1}, \quad (11)$$

где константа c определяется начальными условиями.

Из Теоремы 2 и формул (9) следует, что $W_{loc}^u(0, 0)$ можно представить как график $x_2 = h(x_1)$, причем $h(0) = h'(0) = 0$, так как W_{loc}^u касается E^u в точке $(0, 0)$. Следовательно, $c = 0$ в (11), и неустойчивое многообразие

$$W^u(0, 0) = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 = x_1^2/3\}. \quad (12)$$

Наконец, заметим, что если $x_1(0) = 0$, то $\dot{x}_1 \equiv 0$, откуда получаем $x_1(t) \equiv 0$ и, следовательно, $W^s(0, 0) \equiv E^s$. Заметим, что в данном примере мы нашли глобальные устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия (см. Рис. 4).

Как хорошо известно, нелинейные системы могут обладать предельными множествами, отличными от неподвижных точек. Например, часто встречаются *замкнутые* или *периодические орбиты*. Для периодической орбиты существует T такое, что $0 < T < \infty$ и $x(T) = x(t + T)$ для всех

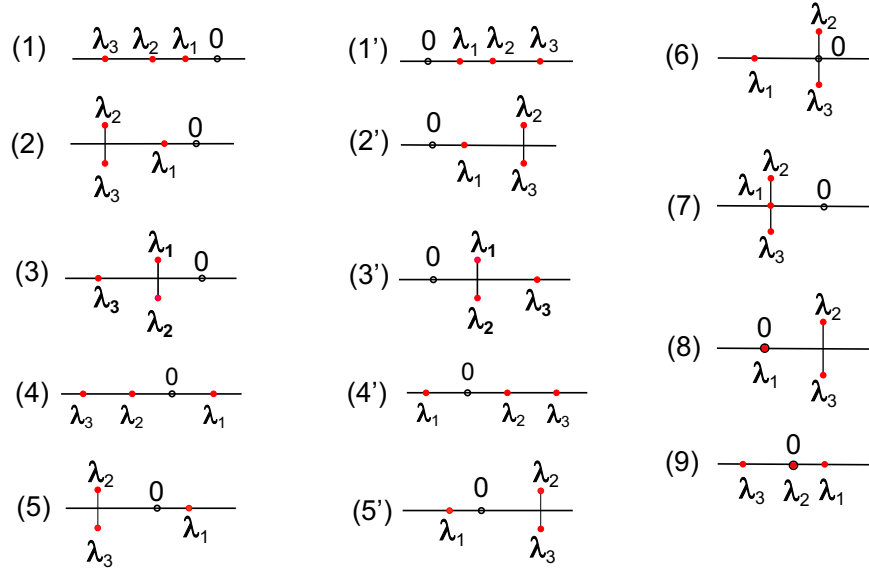


Рис. 5: Варианты расположения нулей λ_i полинома третьей степени на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, регулярные случаи (1)-(5) и (1')-(5') и вырожденные случаи (6)-(9)

t . Тогда наименьшее из таких T называется *периодом* орбиты $x(t)$. Мы рассмотрим устойчивость периодических орбит в следующих лекциях, а сейчас заметим, что они так же, как неподвижные точки, имеют устойчивые и неустойчивые многообразия. Обозначим через γ замкнутую орбиту, через U - некоторую её окрестность. Тогда определим

$$W_{loc}^s(\gamma) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi_t(x) - \gamma| = 0, \quad \varphi_t(x) \in U, \quad t \geq 0\},$$

$$W_{loc}^u(\gamma) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow -\infty} |\varphi_t(x) - \gamma| = 0, \quad \varphi_t(x) \in U, \quad t \leq 0\}.$$

Трёхмерные системы линейных ОДУ

Рассмотрим грубые состояния равновесия трёхмерных канонических систем линейных автономных дифференциальных уравнений. Характеристическое уравнение – вещественное кубическое уравнение, которое может иметь три вещественных корня либо один вещественный и два комплексных корня. Расположение этих корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ на плоскости комплексного переменного λ может быть разным. Будем обращать внимание на модуль и знаки вещественных частей $\operatorname{Re} \lambda_i$. Возможны 10 грубых случаев, когда нет точек λ на мнимой оси, и ряд вырожденных случаев (см. Рис. 5).

Сначала изучим случай, когда корни характеристического уравнения λ_i ($i = 1, 2, 3$) действительны, различны и $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Тогда

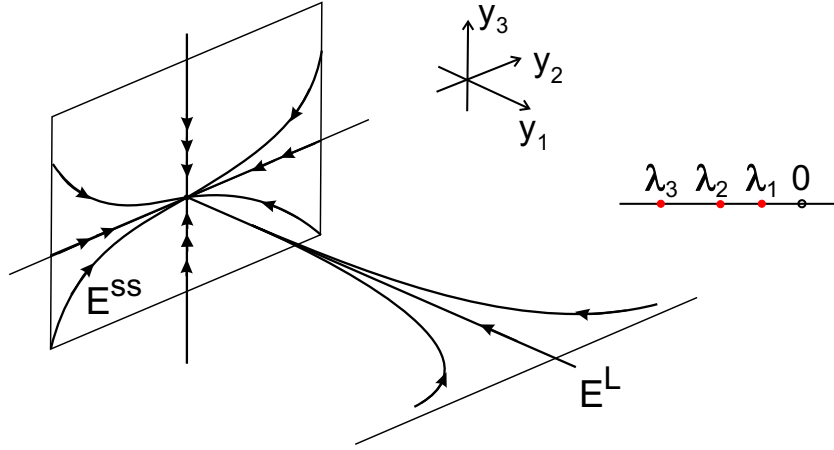


Рис. 6: Устойчивый узел в R^3 : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – вещественные

соответствующая трехмерная система приводится к каноническому виду

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, \quad \dot{y}_3 = \lambda_3 y_3. \quad (13)$$

Общее решение имеет вид

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot y_1^0, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} \cdot y_2^0, \quad y_3(t) = e^{\lambda_3 t} \cdot y_3^0. \quad (14)$$

Произвольные постоянные y_1^0, y_2^0 и y_3^0 определяются начальным положением фазовой точки при $t = 0$.

Поскольку λ_i отрицательны, то точка O – устойчивое положение равновесия, то есть все траектории стремятся к 0 при $t \rightarrow +\infty$. Более того, все траектории вне неведущей плоскости (y_2, y_3) приближаются к точке O по *ведущему* направлению, совпадающему с осью y_1 . Такое состояние равновесия называется *устойчивым узлом* (см. Рис. 6). Чем меньше стрелок на траектории, тем меньше скорость движения фазовой точки вдоль нее. Ведущее подпространство E^L – одномерное, двумерное подпространство E^{SS} – неведущее.

Рассмотрим случай 2), когда среди характеристических показателей имеется пара комплексно-сопряженных $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$. Вещественная жорданова форма определяет канонический вид системы ОДУ:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где $\alpha < \lambda_1 < 0$, $\beta > 0$. Блочная структура матрицы позволяет отделить уравнение для y_1 от остальных двух. Действительно, система (15)

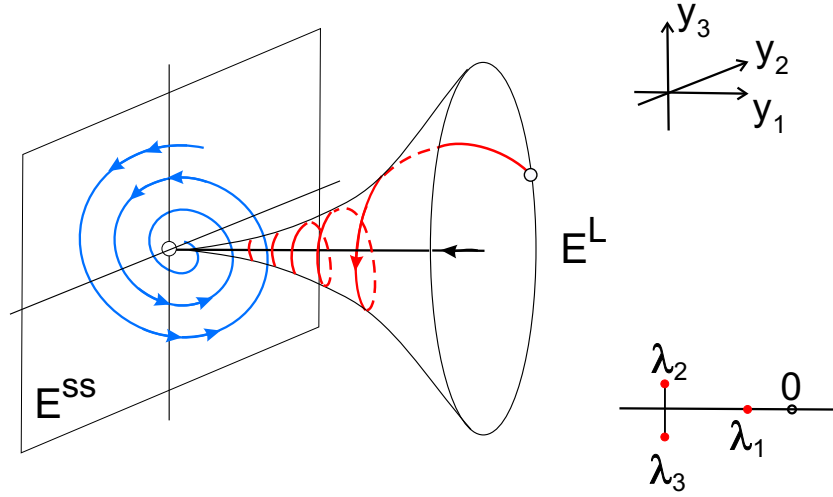


Рис. 7: Пример другого устойчивого узла в R^3 : λ_1 – вещественное, λ_2, λ_3 – комплексные числа

эквивалентна двум системам меньшей размерности:

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

В данном случае общее решение имеет вид

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1^0, \quad \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2^0 \\ y_3^0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Из (16) следует, что

$$\sqrt{y_2^2(t) + y_3^2(t)} = e^{\alpha t} \sqrt{(y_2^0)^2 + (y_3^0)^2}.$$

Кроме того, для любой траектории, начальная точка которой не лежит на неведущей плоскости (y_2, y_3) , имеем

$$\sqrt{y_2^2(t) + y_3^2(t)} = c |y_1(t)|^\nu$$

где $\nu = \alpha/\lambda_1$, а $c = \sqrt{(y_2^0)^2 + (y_3^0)^2}/|y_1^0|^\nu$. Поскольку $\nu > 1$, то все траектории приближаются к точке O вдоль одномерного ведущего подпространства E^L – оси y_1 . Состояние равновесия также называют *устойчивым узлом* (см. Рис. 7).

В третьем случае при $\lambda_3 < \alpha < 0$ вещественная жорданова форма имеет вид

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

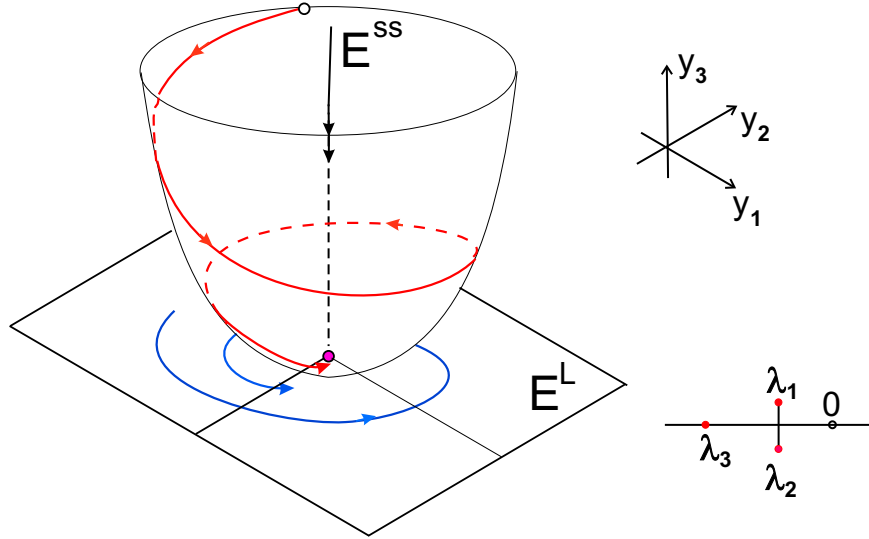


Рис. 8: Устойчивый фокус в R^3 : λ_1, λ_2 – комплексные числа, λ_3 – вещественное

Состояние равновесия $(0, 0)$ называется *устойчивым фокусом*. В данном случае общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\alpha t} (y_1^0 \cos \beta t - y_2^0 \sin \beta t), \\ y_2(t) &= e^{\alpha t} (y_1^0 \sin \beta t + y_2^0 \cos \beta t), \\ y_3(t) &= e^{\lambda_3 t} y_3^0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из равенств (17) следует, что

$$\sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)} = e^{\alpha t} \sqrt{(y_1^0)^2 + (y_2^0)^2}.$$

Для любой траектории, начальная точка которой не лежит на ведущей плоскости (y_1, y_2) , имеем

$$\sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)} = c |y_3(t)|^\nu, \quad (18)$$

где $\nu = \alpha/\lambda_3$, а $c = \sqrt{(y_1^0)^2 + (y_2^0)^2}/|y_3^0|^\nu$. В соотношении (18) в данном случае $\nu \in (0, 1)$. Следовательно, все траектории, для которых $c \neq 0$ (то есть траектории, начальные точки которых не лежат на оси y_3), остаются вне одномерного подпространства E^{SS} и стремятся к точке O , касаясь плоскости (y_1, y_2) , как показано на Рис. 8. В данном случае ось y_3 называют *неведущим направлением*, а плоскость (y_1, y_2) – *ведущей плоскостью* E^L .

Когда характеристические корни есть как слева, так и справа от мнимой оси, то состояние равновесия является либо седлом, либо седло-фокусом (название дал А.Пуанкаре).

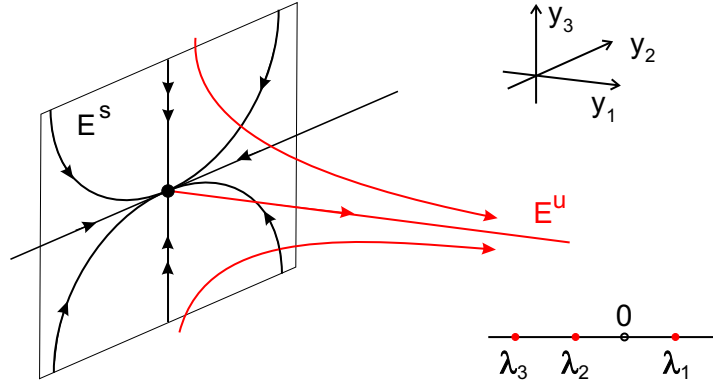


Рис. 9: Седло в R^3 с двумерным устойчивым подпространством E^s и одномерным неустойчивым подпространством E^u

Рассмотрим 4) случай, когда λ_i – вещественны и $\lambda_1 > 0$, $\lambda_3 < \lambda_2 < 0$. Тогда состояние равновесия – *седло*, происходит сжатие фазового пространства по двум направлениям и растяжение – по третьему (Рис. 9).

Общее решение также задается формулой (14). Поскольку $\lambda_1 > 0$, $\lambda_3 < \lambda_2 < 0$, то при $t \rightarrow +\infty$ координаты y_2 и y_3 экспоненциально уменьшаются до нуля, а координата y_1 стремится к бесконечности, если $y_1^0 \neq 0$. С другой стороны, координата y_1 уменьшается до нуля при $t \rightarrow -\infty$. Следовательно, все траектории, полностью лежащие в *устойчивом подпространстве* $E^s = \{y \in R^3 : y_1 = 0\}$, стремятся к седлу при возрастании $t \rightarrow +\infty$, а траектории, лежащие в *неустойчивом подпространстве* $E^u = \{y \in R^3 : y_2 = y_3 = 0\}$, стремятся к седлу при $t \rightarrow -\infty$. Траектории вне $E^s \cup E^u$ проходят вблизи седла, но минуя его.

Наглядно движение фазовой точки можно представить как суперпозицию движений фазовых точек по подпространствам E^u и E^s . Имеется в виду следующее. Движение любой фазовой точки $(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ при изменении t таково, что проекция $(0, y_2(t), y_3(t))$ фазовой траектории представляет движение по подпространству E^s , а проекция $(y_1(t), 0, 0)$ – движение фазовой точки по подпространству E^u .

Траектории системы вблизи *седло-фокуса* для $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$, ведут себя аналогично (см. Рис. 10). Жорданова форма матрицы имеет вид

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Единственное отличие заключается в том, что в случае седло-фокуса точка O является в E^s (устойчивом подпространстве) – устойчивым фо-

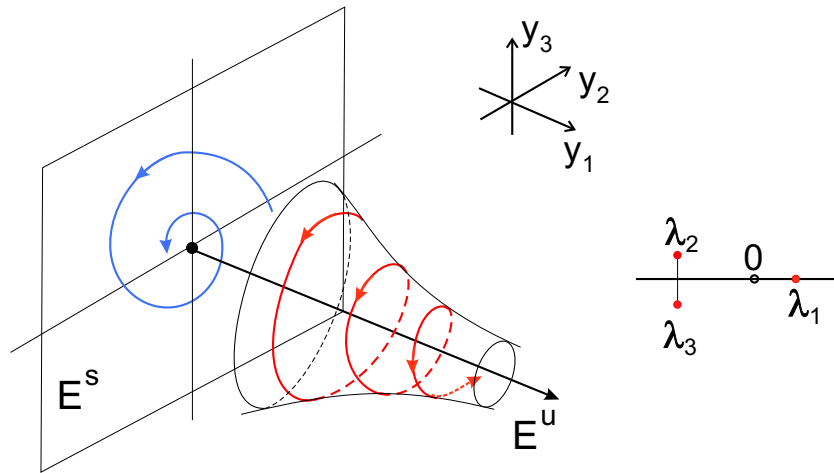


Рис. 10: Седло-фокус в R^3

кусом.

Случаи 1'–5' сводятся к случаям 1–5 путем замены t на $-t$, то есть изменяется направление движения изображающих точек по фазовым траекториям. Следовательно, на рисунках 6–10 нужно лишь заменить стрелки на противоположные.

Задача 2: Нарисовать фазовые портреты в случаях 6), 7), 8), 9).