

Лекция 2

Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Сделаем сначала обзор некоторых свойств линейной системы ОДУ

$$\frac{d}{dt}x = Ax, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

или

$$\dot{x} = Ax,$$

где A – матрица размерности $n \times n$ с постоянными действительными коэффициентами, x – вектор. Среди решений системы (1) будем выбирать векторнозначную функцию $x(t, x_0)$, зависящую от времени t и начального условия

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

то есть $x(t, x_0)$ – решение задачи Коши (1)–(2). В терминах потока мы имеем $x(t, x_0) \equiv \varphi_t(x_0)$ для $x_0 \in R^n$.

Существование и единственность решения задачи Коши. Матричная экспонента

Поскольку для любых $x, y \in R^n$ выполнено неравенство

$$\|Ax - Ay\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\|,$$

то правая часть системы (1) удовлетворяет всюду в R^n условию Липшица с константой $L = \|A\|$. Следовательно, Теорема 3 гарантирует, что решение $x(t, x_0)$ задачи Коши (1)–(2) для линейной системы ОДУ определено для всех $t \in R$ и $x_0 \in R^n$, причем

$$\|x(t, x_0)\| \leq \|x_0\| \cdot e^{L|t|} = \|x_0\| \cdot e^{|t| \cdot \|A\|}.$$

Заметим, что такое глобальное существование решения во времени часто не имеет места в нелинейных системах, как мы это видели на примерах. Однако для линейных систем такой проблемы нет, и решение $x(t, x_0)$ для всех t задается формулой

$$x(t, x_0) = e^{tA}x_0, \quad (3)$$

где $\mathbf{e}^{tA}$ – матричная экспонента ($n \times n$ матрица) или оператор эволюции. Ее можно определить в виде матричного ряда

$$\mathbf{e}^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots,$$

который состоит из n^2 абсолютно сходящихся рядов, каждый из которых мажорируется рядом $\mathbf{e}^{|t| \cdot \|A\|}$. Заметим, что при $t = 0$ оператор эволюции является тождественным оператором: $\mathbf{e}^{0 \cdot A} = E$.

Общее решение системы (1) можно получить как линейную комбинацию n линейно независимых решений $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x_j(t),$$

где n неизвестных констант c_j определяются начальными условиями. Если матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов u_j ($j = 1, \dots, n$), то мы можем принять за базис пространства решений векторнозначные функции

$$x_j(t) = \mathbf{e}^{\lambda_j t} \cdot u_j,$$

где λ_j – собственное значение, соответствующее u_j . Для простых комплексных собственных значений λ_j , $\bar{\lambda}_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ собственные векторы имеют вид $u_j = v_j \pm i \cdot w_j$, и мы можем выбрать

$$\begin{aligned} x_j(t) &= \mathbf{e}^{\alpha_j t} \cdot (v_j \cos \beta_j t - w_j \sin \beta_j t), \\ x_{j+1}(t) &= \mathbf{e}^{\alpha_j t} \cdot (v_j \sin \beta_j t + w_j \cos \beta_j t) \end{aligned}$$

в качестве соответствующей пары вещественных линейно независимых решений. При наличии кратных собственных значений и числе собственных векторов менее n можно построить *присоединенные векторы*. В результате мы вновь получим множество из n линейно независимых решений. Обозначим *фундаментальную матрицу решений*, столбцами которой являются эти n решений, через

$$Y(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)].$$

Столбцы $x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ матрицы $Y(t)$ образуют базис в пространстве решений уравнения (1). Нетрудно показать, что

$$\mathbf{e}^{tA} = Y(t) \cdot Y^{-1}(0).$$

Задача 1. Вычислить e^{tA} для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а затем решить уравнение $\dot{x} = Ax$ с начальными данными

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Что можно сказать о двух последних решениях? Внимательно изучите геометрию этих решений и собственных подпространств.

Указание: Характеристическое уравнение имеет вид $(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) = 0$, и собственные значения определяются как $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

Определение. Матрицы A и B называются *подобными*, если существует невырожденная матрица P такая, что $B = P^{-1}AP$. Тогда P называется *матрицей перехода*.

Решение уравнения (1) можно определить в квадратурах, если найти невырожденное преобразование P , которое диагонализует матрицу A или, по крайней мере, приводит ее к действительной жордановой нормальной форме (в случае комплексных или кратных собственных значений). Тогда уравнение (1) примет вид

$$\dot{y} = Jy, \tag{4}$$

где $J = P^{-1}AP$ – жорданова форма матрицы A , векторы x и y связаны соотношением $x = Py$, а матричную экспоненту e^{tA} можно вычислить по формуле

$$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}. \tag{5}$$

Система уравнений (4) называется *канонической системой* ОДУ, эквивалентной линейной системе (1).

Потоки и инвариантные подпространства

Матричную экспоненту e^{tA} при каждом фиксированном t можно рассматривать как отображение из R^n в R^n . А именно, для любой точки

$x_0 \in R^n$ ее образ $x(t, x_0) = e^{tA}x_0$ представляет собой точку, в которой решение с начальными данными в x_0 будет находиться через время t . Следовательно, оператор e^{tA} содержит *глобальную* информацию о множестве всех решений уравнения (1), так как формула (3) справедлива для всех точек $x_0 \in R^n$. Как и в общем случае, описанном в предыдущей лекции, мы будем говорить, что e^{tA} определяет *поток* на R^n и что поток (или "фазовый поток") *порождается* векторным полем Ax , определенным на R^n . Таким образом, в нашем курсе лекций e^{tA} является первым конкретным примером потока φ_t , заданного в n -мерном фазовом пространстве.

Поток

$$e^{tA} : R^n \rightarrow R^n$$

можно понимать как множество всех решений уравнения (1). В этом множестве некоторые решения играют особую роль, а именно, те, которые лежат в линейных подпространствах, натянутых на собственные векторы. Эти подпространства *инвариантны* относительно e^{tA} , то есть если точка x_0 лежит в одном из таких подпространств, то решение $e^{tA}x_0$ принадлежит этому же подпространству для всех $t \in R$. В частности, если u_j – (вещественный) собственный вектор матрицы A , то решение с начальными данными $c_j u_j \in R^n$ остается в линейной оболочке $\text{span}\{u_j\}$ для всех t . В самом деле, u_j является также собственным вектором e^{tA} , поскольку $e^{tA}u_j = e^{\lambda_j t}u_j$, и, следовательно,

$$x(t, c_j u_j) = c_j e^{\lambda_j t} \cdot u_j.$$

Аналогично, если u_j – комплексный собственный вектор, то двумерное подпространство

$$\text{span} \{ \text{Re}(u_j), \text{Im}(u_j) \}$$

инвариантно относительно e^{tA} . Таким образом, собственные подпространства матрицы A являются инвариантными подпространствами для потока e^{tA} .

Мы будем разделять подпространства, натянутые на собственные векторы, на три класса:

$$\begin{aligned} E^s &= \text{span}\{v_1, \dots, v_{n_s}\} && \text{устойчивое подпространство,} \\ E^u &= \text{span}\{u_1, \dots, u_{n_u}\} && \text{неустойчивое подпространство,} \\ E^c &= \text{span}\{w_1, \dots, w_{n_c}\} && \text{центральное подпространство.} \end{aligned}$$

Здесь $v_1, \dots, v_{n_s}$ – собственные (и присоединенные) векторы, отвечающие собственным значениям с отрицательной вещественной частью,

$u_1, \dots, u_{n_u}$ – собственные (и присоединенные) векторы, отвечающие собственным значениям с положительной вещественной частью,
 $w_1, \dots, w_{n_c}$ – собственные (и присоединенные) векторы, отвечающие собственным значениям с нулевой вещественной частью.

Очевидно, что $n_s + n_u + n_c = n$.

Названия подпространств отражают то обстоятельство, что решения, лежащие в E^s , характеризуются экспоненциальным затуханием (монотонным или осцилляционным), в то время как решения, лежащие в E^u экспоненциально растут со временем, а решения из E^c не обладают экспоненциальным ростом или затуханием. При отсутствии кратных собственных значений решения последнего типа или осциллируют с постоянной амплитудой (если $\lambda, \bar{\lambda} = \pm i\beta$), или остаются постоянными (если $\lambda = 0$). *Неподвижные точки (положения равновесия или стационарные состояния)* системы ОДУ (1) удовлетворяют уравнению

$$Ax = 0$$

и лежат в центральном подпространстве. Если матрица A невырождена, то есть ее определитель отличен от нуля, то начало координат является единственной неподвижной точкой системы (1).

Напомним некоторые утверждения из теории линейных систем ОДУ на плоскости ($n=2$).

Классы подобия действительных 2×2 матриц

Пусть A – действительная 2×2 матрица. Тогда существует действительная невырожденная матрица перехода P такая, что жорданова форма $J = P^{-1}AP$ принадлежит одному из перечисленных ниже типов:

$$\begin{aligned} (a) \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 > \lambda_2 & \quad (b) \quad \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, & \quad (6) \\ (c) \quad \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, & \quad (d) \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \beta > 0, \end{aligned}$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Поскольку матрицы A и J подобны, то они имеют один и тот же характеристический многочлен:

$$\det(J - \lambda E) = \det[P^{-1}(A - \lambda E)P] = \det(A - \lambda E).$$

Другими словами, коэффициенты *характеристического уравнения*

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A) \cdot \lambda + \det A = 0 \quad (7)$$

инвариантны относительно преобразования подобия. Два важных инварианта: $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$ – след матрицы A и $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ – ее определитель. *Корни характеристического уравнения (7) (нули характеристического полинома или собственные значения матрицы A) имеют вид*

$$\lambda_1 = (\operatorname{tr} A + \sqrt{\Delta})/2, \quad \lambda_2 = (\operatorname{tr} A - \sqrt{\Delta})/2,$$

где $\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A$ – дискриминант характеристического уравнения.

Для жордановых форм (a)–(d) матричные экспоненты $\mathbf{e}^{tJ}$ имеют вид

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 > \lambda_2, \quad (b) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{\lambda_0 t} \end{bmatrix},$$

$$(c) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_0 t} & t\mathbf{e}^{\lambda_0 t} \\ 0 & \mathbf{e}^{\lambda_0 t} \end{bmatrix}, \quad (d) \quad \mathbf{e}^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}, \quad \beta > 0.$$

Как видим, тип жордановой формы матрицы A и матричной экспоненты $\mathbf{e}^{tA}$ полностью определяется двумя параметрами – $\operatorname{tr} A$ и $\det A$.

Фазовые портреты канонических систем ОДУ на плоскости

Сейчас мы изучим качественное поведение решений линейных систем малой размерности, ограничившись системами с *простыми состояниями равновесия*, то есть такими, матрица A которых не имеет нулевых собственных значений. Отметим, что в этом случае $\det A \neq 0$ и единственная неподвижная точка лежит в начале координат.

(a): Собственные значения λ_1, λ_2 действительны и различны: $\lambda_1 > \lambda_2$. Собственные векторы u_1 и u_2 матрицы A определяются из уравнений

$$(A - \lambda \cdot E)u_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

Преобразование $x = Py$, где матрица перехода $P = [u_1, u_2]$ состоит из двух вектор-столбцов u_1 и u_2 , так что

$$AP = [Au_1, Au_2] = [\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2] = PJ,$$

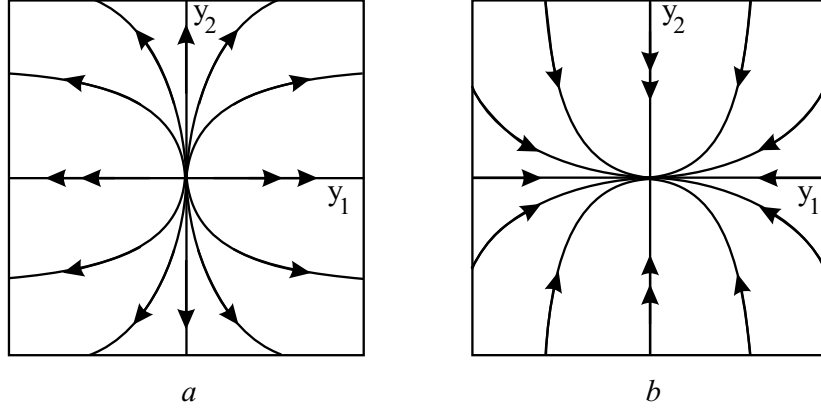


Рис. 1: Неустойчивый узел ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$) (a) и устойчивый узел ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$) (b)

переводит систему $\dot{x} = Ax$ в систему

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, \quad (8)$$

общее решение которой имеет вид

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Если $\det A > 0$, то λ_1 и λ_2 одного знака, и возможные фазовые портреты системы (8) имеют вид, показанный на Рис. 1. Неподвижная точка в начале координат называется *узлом*. Если все траектории направлены к началу координат ($\lambda_1, \lambda_2 < 0$), то узел называется *устойчивым*. Если траектории направлены от начала координат ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$), то узел называется *неустойчивым*.

Форма траекторий определяется величиной

$$\gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1,$$

где $\gamma > 0$ при отрицательных λ_1, λ_2 , и $\gamma < 0$ при $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Заметим, что из (8) и (9) следует уравнение

$$\frac{dy_2}{dy_1} = k y_1^\gamma,$$

где $k = (\gamma + 1) c_2 / c_1^{\gamma+1}$. Следовательно, при $y_1 \rightarrow 0$

$$\frac{dy_2}{dy_1} \rightarrow \begin{cases} 0, & \gamma > 0, \\ \infty, & \gamma < 0. \end{cases} \quad (10)$$

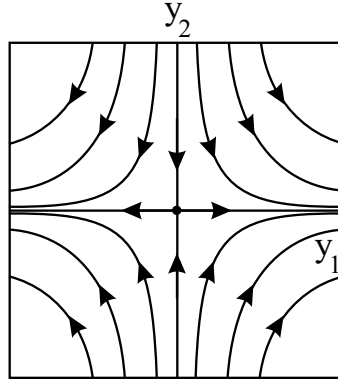


Рис. 2: Неподвижная точка типа *седло* ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$)

Когда $\lambda_{1,2}$ отрицательные, все траектории направлены к началу координат при возрастании t . При этом каждая траектория может приближаться к началу координат, касаясь либо оси y_1 , либо оси y_2 . Согласно соотношению (10), все траектории стремятся к началу координат, касаясь оси y_1 , кроме двух траекторий, лежащих на оси y_2 . Оси y_1 и y_2 называются *ведущим* и *неведущим направлениями*, соответственно. На Рис. 1,b двойными стрелками отмечено *сильно устойчивое* (неведущее) направление, совпадающее с осью y_2 . Вдоль оси y_2 происходит сильное сжатие фазового пространства потоком $\mathbf{e}^{tJ}$.

Задача 2: Определите ведущее и сильно неустойчивое направления в окрестности неустойчивого узла (Рис. 1,a).

Если $\det A < 0$, то λ_1 и λ_2 имеют противоположные знаки, и возникает фазовый портрет, изображенный на Рис. 2. В этом случае начало координат называется *седлом* или *седловой точкой*. На осях координат, исключая начало, лежат особые траектории, которые называются *сепаратрисами*: две устойчивые и две неустойчивые, которые направлены к седлу при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$, соответственно. Это единственные траектории, имеющие вид радиальных лучей. Напомним, что индексы выбраны так, что $\lambda_1 > \lambda_2$, и в рассматриваемом случае $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Пара устойчивых сепаратрис и седло образуют устойчивое инвариантное подпространство E^s (ось y_2), которое, таким образом, состоит из трех целых траекторий. Неустойчивое инвариантное подпространство E^u (ось y_1) состоит из неустойчивых сепаратрис и самой седловой точки. Поскольку для остальных траекторий сепаратрисы являются асимптота-

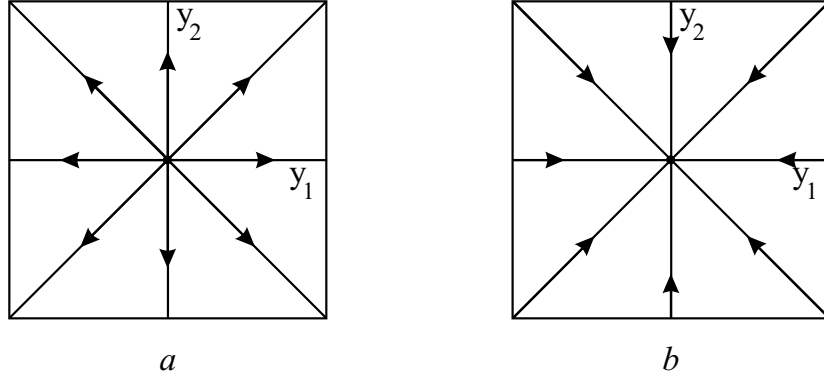


Рис. 3: Дикритический узел при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$: неустойчивый при $\lambda_0 > 0$ (а), устойчивый при $\lambda_0 < 0$ (б)

ми, то неустойчивое подпространство является *притягивающим множеством*, то есть все траектории стремятся в окрестность неустойчивого подпространства при $t \rightarrow +\infty$.

(b) и (c): Равные действительные собственные значения.

В случае (b), когда матрица J диагональная, каноническая система имеет вид (8) с $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$, существуют два линейно независимых собственных вектора. Фазовые траектории удовлетворяют соотношению

$$y_2 = ky_1, \quad k = c_2/c_1,$$

так что все нетривиальные траектории (9) являются радиальными лучами на плоскости (y_1, y_2) . Фазовая точка с увеличением t до $+\infty$ приближается к особой точке (если $\lambda_0 < 0$) или удаляется от нее (при $\lambda_0 > 0$) по направлению, которое определяется начальным положением точки (c_1, c_2) на фазовой плоскости. Таким образом, случай (b) соответствует узлу специального вида, который называется *дикритическим узлом* (Рис. 3). Этот узел устойчив при $\lambda_0 < 0$ и неустойчив при $\lambda_0 > 0$.

Рассмотрим случай, когда матрица J не диагональная, то есть имеет вид (с) из (6). Тогда $\text{rank}(A - \lambda_0 E) = 1$ и, следовательно, не существует двух линейно независимых собственных векторов. Пусть u_0 – собственный и u_1 – присоединенный вектор, то есть $(A - \lambda_0 E)u_0 = 0$ и $(A - \lambda_0 E)u_1 = u_0$. Преобразование $x = Py$ определяется матрицей $P = [u_0, u_1]$, которая состоит из вектор-столбцов u_0 и u_1 , так что

$$AP = [Au_0, Au_1] = [\lambda_0 u_0, \lambda_0 u_1 + u_0] = PJ,$$

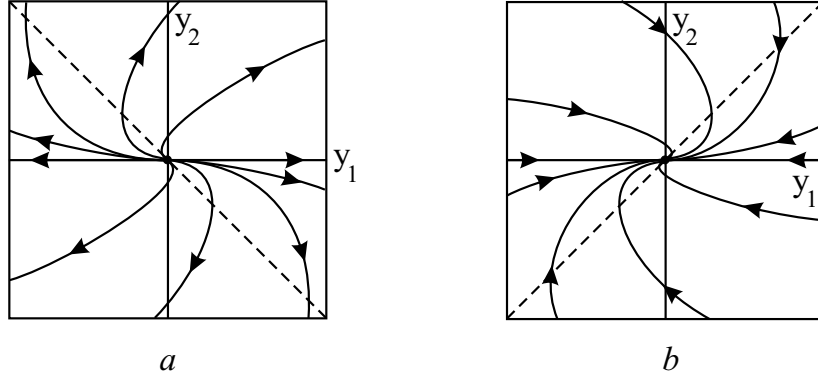


Рис. 4: Вырожденный узел при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$: неустойчивый при $\lambda_0 > 0$ (а), устойчивый при $\lambda_0 < 0$ (б)

и система $\dot{x} = Ax$ переходит в систему уравнений

$$\dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + y_2, \quad \dot{y}_2 = \lambda_0 y_2, \quad \lambda_0 \neq 0. \quad (11)$$

Эта система имеет общее решение

$$y_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_0 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_0 t}, \quad c_1, c_2 \in R. \quad (12)$$

В этом случае начало координат называется *вырожденным узлом*, он устойчив при $\lambda_0 < 0$ и неустойчив при $\lambda_0 > 0$ (Рис. 4). Все траектории стремятся к началу координат при $t \rightarrow +\infty$ (или $t \rightarrow -\infty$), касаясь оси y_1 – собственного подпространства, соответствующего собственному вектору $(1, 0)^T$ матрицы J .

Отметим, что кривая, на которой изменяется направление движения фазовых точек по траекториям системы (11) относительно оси y_1 , – это геометрическое место точек экстремума функции $y_1(y_2)$, которое задается уравнением $\dot{y}_1 = 0$. Это прямая $y_2 = -\lambda_0 y_1$, которая является *главной изоклиной* системы (11) и изображена пунктирной линией на Рис. 4. Вторая главная изоклина системы (11) задается уравнением $\dot{y}_2 = 0$ и совпадает с осью y_1 .

(d): Комплексные собственные значения $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$.

В этом случае преобразование $x = Py$, где

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} - \alpha & -\beta \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

переводит систему $\dot{x} = Ax$ в систему уравнений

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1 - \beta y_2, \quad \dot{y}_2 = \beta y_1 + \alpha y_2, \quad (13)$$

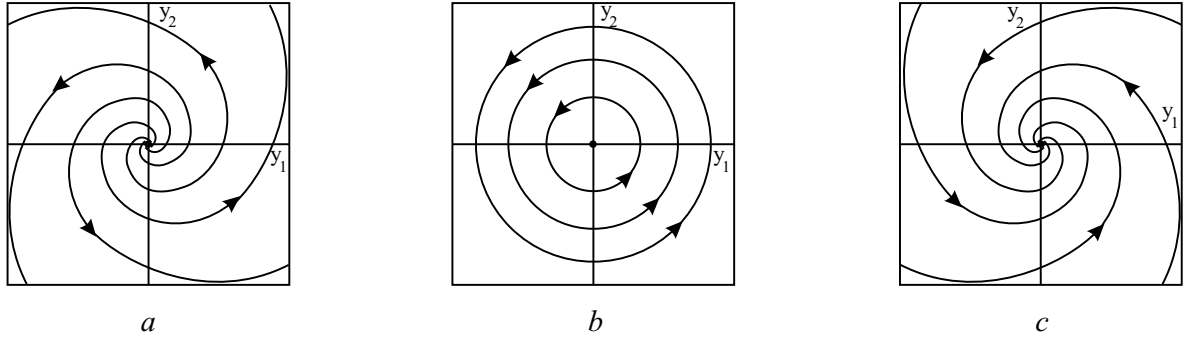


Рис. 5: Стационарное состояние при $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$: неустойчивый фокус при $\alpha > 0$ (а), центр при $\alpha = 0$ (b), устойчивый фокус при $\alpha < 0$ (с)

то есть жорданова форма J матрицы A имеет вид (d) из (6).

Для того, чтобы доказать, что матрица P не вырождена, запишем дискриминант Δ характеристического уравнения (7) в следующем виде

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}.$$

В случае комплексных собственных значений $\Delta < 0$, то есть $a_{12}a_{21} < 0$ и, следовательно, $a_{21} \neq 0$. Поскольку $2\beta = \sqrt{|\Delta|} > 0$, то мы получаем $\det P = \beta a_{21} \neq 0$.

Решениями системы (13) будут вектор-функции

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Возможные типы фазовых портретов даны на Рис. 5.

Если $\alpha \neq 0$, то начало координат называется *фокусом*, неустойчивым при $\alpha > 0$ (Рис. 5,а) или устойчивым при $\alpha < 0$ (Рис. 5,с). Иногда говорят, что фазовый портрет состоит из *отталкивающей* или *притягивающей спирали*, поскольку любая траектория, за исключением неподвижной точки, имеет вид спирали, закрученной против часовой стрелки. Параметр β определяет угловую скорость точки на спирали.

Если $\alpha = 0$, то начало координат называется *центром* и фазовый портрет состоит из континуума концентрических окружностей (Рис. 5,б). Это единственный случай, когда в линейных системах ОДУ возникает периодическое движение. Период равен $T = 2\pi/\beta$. Центр – *негрубое состояние равновесия*, поскольку собственные значения имеют нулевую действительную часть.

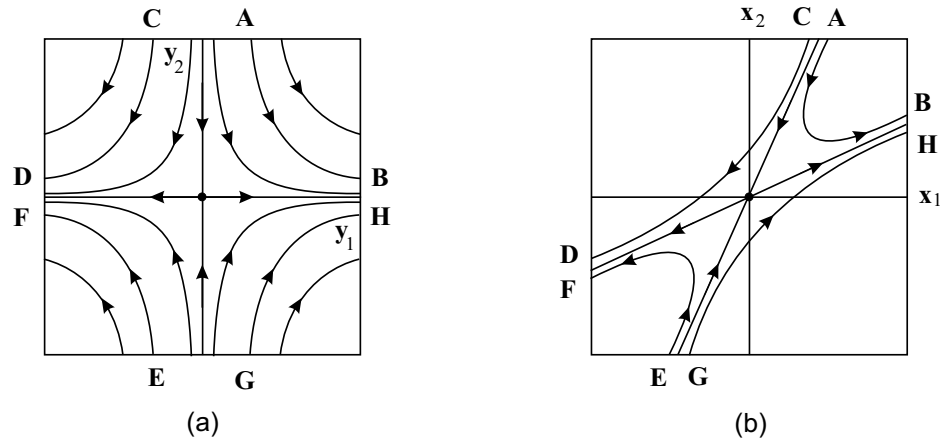


Рис. 6: Фазовые портреты линейной системы двух ОДУ на плоскости (y_1, y_2) (a) и на плоскости переменных $x = Py$ (b)

Фазовые портреты линейных систем ОДУ на плоскости

Фазовый портрет произвольной линейной системы $\dot{x} = Ax$ можно получить из фазового портрета соответствующей канонической системы $\dot{y} = Jy$ с помощью преобразования $x = Py$. Например, каноническая система

$$\dot{y}_1 = y_1, \quad \dot{y}_2 = -y_2$$

имеет фазовый портрет, изображенный на Рис. 6,а. Рассмотрим, как изменится фазовый портрет в результате преобразования $x = Py$, где

$$P = [u_1, u_2] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $x = y_1 \cdot u_1 + y_2 \cdot u_2$, то y_1 и y_2 являются координатами точки x относительно базиса $\{u_1, u_2\}$, составленного из столбцов матрицы P . Напомним, что u_1 и u_2 – собственные векторы матрицы $A = PJP^{-1}$. Таким образом, оси y_1 и y_2 – это прямые, проходящие через начало координат на плоскости (x_1, x_2) и имеющие, соответственно, направления векторов u_1 и u_2 .

При невырожденном линейном отображении P траектории канонической системы $\dot{y} = Jy$ переходят в траектории системы $\dot{x} = Ax$, причем ориентация на траекториях сохраняется. В частности, направления сепаратрис на плоскости (x_1, x_2) задаются собственными векторами матрицы A (см. Рис. 6,б). Направления векторов u_1 и u_2 называются *главными направлениями*.

Из свойств преобразования $x = Py$ следует, что хотя фазовый портрет канонической системы при таком преобразовании искажается, начало координат по-прежнему остается неподвижной точкой и тип фазового портрета не меняется. Другими словами, линейные преобразования сохраняют качественное поведение решений линейных систем ОДУ.

Параметрический портрет линейной системы двух ОДУ

Все полученные результаты о поведении решений системы ОДУ для $n = 2$ можно отразить в *параметрическом портрете*. Тип фазового портрета динамической системы $\dot{x} = Ax$ определяется собственными значениями λ_1 и λ_2 матрицы A или, что то же самое, двумя параметрами $\text{tr } A$ и $\det A$. Рассмотрим плоскость $(\text{tr } A, \det A)$ и выделим на ней области, в каждой из которых тип фазового портрета один и тот же для всех точек области. Прежде всего, построим кривую $\Delta = 0$, разделяющую множества, соответствующие действительным и комплексным числам λ_1 и λ_2 . Это парабола $(\text{tr } A)^2 - 4 \cdot \det A = 0$, ниже которой дискриминант Δ положителен, а выше — $\Delta < 0$.

Рассмотрим сначала точки, в которых $\Delta > 0$, то есть λ_1 и λ_2 — действительные числа. Если $\det A < 0$ (нижняя полуплоскость на Рис. 7), то λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, то есть стационарная точка — типа седла, фазовый портрет соответствует показанному на Рис. 2. Если $\det A > 0$ и $\text{tr } A > 0$, то λ_1 и λ_2 оба положительны, и начало координат — неустойчивый узел, типичный фазовый портрет показан на Рис. 1,а. Если $\det A > 0$ и $\text{tr } A < 0$, то узел устойчивый (см. Рис. 1,б).

В точках, расположенных выше параболы $\Delta = 0$ на параметрической плоскости, выполнено неравенство $\det A > 1/4 \cdot (\text{tr } A)^2$, то есть дискриминант характеристического уравнения отрицателен и λ_1, λ_2 — комплексно-сопряженные числа. Тогда тип матрицы A соответствует случаю (d) в (6). Если при этом $\text{tr } A > 0$, то $\alpha > 0$ и стационарная точка — неустойчивый фокус, фазовый портрет показан на Рис. 5,а. Если же $\text{tr } A < 0$, то $\alpha < 0$ и фокус устойчив (Рис. 5,с).

Границы выделенных областей соответствуют линейным системам, тип фазового портрета которых изменяется при возмущении коэффициентов системы. Это, прежде всего, точки кривой $\Delta = 0$. Им соответствуют системы вида (1) с устойчивым (при $\text{tr } A < 0$) или неустойчивым (при $\text{tr } A > 0$) критическим или вырожденным узлом в начале координат. Типичные фазовые портреты показаны на Рис. 3-4. Если матрица A со-

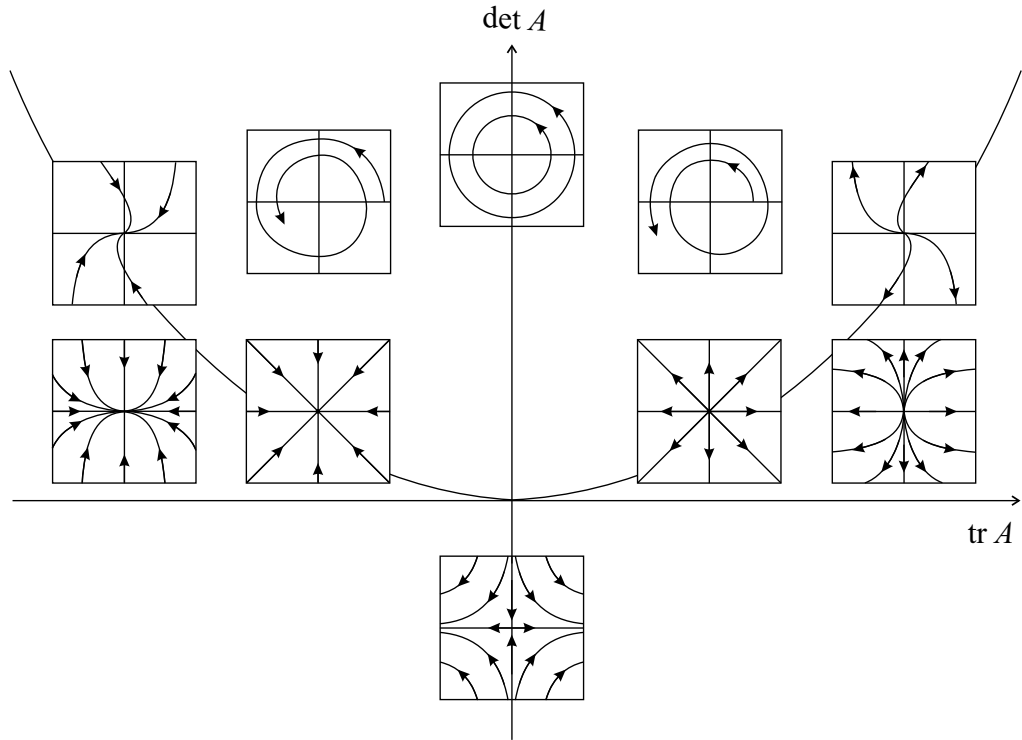


Рис. 7: Параметрический портрет линейной системы $\dot{x} = Ax$ двух ОДУ на параметрической плоскости $(\text{tr } A, \det A)$

ответствует точке на положительной полуоси ординат, где $(\det A > 0)$, то неподвижная точка – типа центр (см. Рис. 5,b) – окружена замкнутыми траекториями.

Если A – сингулярная матрица, то есть $\det A = 0$, то хотя бы одно из ее собственных значений равно нулю. Следовательно, существуют нетривиальные решения уравнения $Ax = 0$, и кроме $x = 0$, система $\dot{x} = Ax$ имеет и другие неподвижные точки. Для линейных систем на плоскости существуют только две возможности – ранг матрицы A равен 1 либо A – нулевая матрица.

Точкам параметрической плоскости, лежащим на положительной полуоси абсцис $(\det A = 0, \text{tr } A > 0)$ соответствуют матрицы A с $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 = 0$. В этом случае каждая точка оси ординат на фазовой плоскости является стационарной, фазовый портрет изображен на Рис. 8,a. Если же $\det A = 0$ и $\text{tr } A < 0$, то $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 < 0$, стационарные точки заполняют всю ось абсцис на фазовой плоскости (y_1, y_2) (см. Рис. 8,b), траектории системы ОДУ располагаются на вертикальных прямых, с увеличением времени изображающая точка будет приближаться к стационарной точке, сохраняя значение $y_1 = \text{const}$.

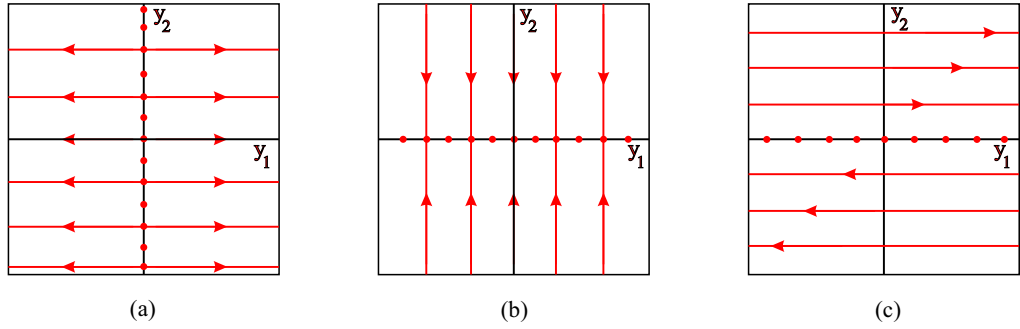


Рис. 8: Фазовые портреты канонических систем ОДУ с сингулярными матрицами ранга 1

И, наконец, в точке $(0,0)$ параметрической плоскости фазовый портрет будет иметь вид, показанный на Рис. 8,с, если ранг матрицы A равен 1, или все точки (y_1, y_2) будут стационарными, если $A = 0$. Отметим, что если A – сингулярная матрица, то неподвижные точки не являются изолированными.

Таким образом, построение параметрического портрета системы двух ОДУ $\dot{x} = Ax$ завершено (Рис. 7). На плоскости параметров $(\text{tr } A, \det A)$ выделены области, которые соответствуют линейным системам ОДУ с *грубыми состояниями равновесия*, тип которых не меняется при малых изменениях параметров уравнений (элементов матрицы A или, соответственно, $\text{tr } A$ и $\det A$). Каждому типу фазового портрета соответствует некоторое множество точек на параметрической плоскости. Каждой точке этой плоскости соответствует определенная пара собственных значений матрицы A и, следовательно, определенная каноническая система.

В дальнейшем основное внимание будет уделяться изолированным неподвижным точкам. Отметим, что кривые, разделяющие области с разным типом фазового портрета, называются *бифуркационными кривыми*. Поиск таких кривых – важный этап в изучении нелинейных динамических систем.