Лекция 1
Общие свойства систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Будем рассматривать ОДУ как систему

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x = x(t)$ – векторнозначная функция независимой переменной $t \in R$ (обычно это время), $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f : \quad U \to R^n$ – гладкая функция, определённая на некотором подмножестве $U \subseteq R^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Функция $f(x)$ в каждой точке $x \in U$ определяет вектор скорости изменения координат точки. Будем говорить, что *векторное поле* f генерирует *поток* $\varphi_t : U \to R^n$, где $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ – гладкая функция, определённая для всех $x \in U$ и t в некотором интервале $I = (a, b) \subseteq R$, и φ удовлетворяет уравнению (1) в том смысле, что

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi(t, x)\right)_{t=\tau} = f(\varphi(\tau, x)). \tag{2}$$

Заметим, что в области определения φ_t удовлетворяет групповым свойствам

$$\begin{aligned} &(i) \qquad \varphi_0 = E, \\ &(ii) \qquad \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s. \end{aligned}$$

Действительно, φ_0 оставляет каждую точку $x \in U$ на месте. Точка $y = \varphi_s(x)$ (Рис. 1), в которую x перейдет за время s, по прошествии времени t перейдет в ту же точку $z = \varphi_t(y)$, в которую x перейдет за время $t + s$, то есть $z = \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_{t+s}(x)$.

Таким образом, поток φ_t – *однопараметрическая группа преобразований* множества U в R^n. U называется *фазовым пространством потока* φ_t, а его элементы – *фазовыми точками*. При каждом $t \in R$ отображение

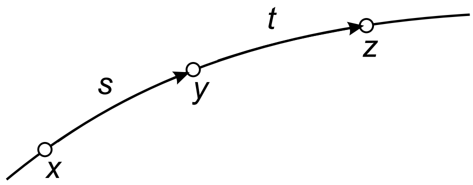

Рис. 1: Изменение фазовых координат процесса с течением времени

$\varphi_t : U \to R^n$ является диффеоморфизмом, то есть взаимнооднозначным и дифференцируемым.

Задача 1. Какие из следующих функций задают диффеоморфизм $f : R \to R$, то есть отображают гладко и взаимнооднозначно прямую в прямую:

$$f(x) = 2x, \quad x^2, \quad x^3, \quad e^x, \quad e^x + x?$$

Часто мы задаёмся *начальными данными* или *условиями Коши*

$$x(0) = x_0 \in U. \tag{3}$$

В этом случае мы ищем решение $\varphi(t, x_0)$ такое, что

$$\varphi(0, x_0) = x_0. \tag{4}$$

Будем иногда обозначать такое решение через $x(t, x_0)$ или просто $x(t)$. Его можно назвать *решением задачи Коши.*

В этом случае $\varphi(t, x_0) : I \to R^n$ определяет для дифференциального уравнения (1) *фазовую кривую* решения, *движение*, *траекторию* или *орбиту* с начальными данными x_0 (см. Рис. 2, a).

Системы вида (1), в которых векторное поле не зависит от времени явно, называются *автономными.* Отметим, что векторное поле автономной системы инвариантно относительно сдвига по траектории, то есть вместе с решением $x(t, x_0)$ функции $x(t + c, x_0)$ для произвольного $c \in R$ также являются решениями уравнения (1). Следовательно, решение с начальными данными при $t_0 \neq 0$ всегда можно преобразовать в решение с условиями при $t_0 = 0$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что это преобразование уже сделано, и рассматривать задачу Коши для уравнения (1) при $t_0 = 0$.

Классическая теория ОДУ имеет дело с индивидуальными решениями и их свойствами. Мы будем стремиться рассматривать семейства фазовых кривых (траекторий) и, следовательно, иметь дело с глобальным поведением отображения $\varphi(t, x) : I \to R^n$, определённого для всех $x \in U$ (см. Рис. 2,b). В частности, важное значение будет иметь понятие гладких инвариантных многообразий, состоящих из траекторий системы (1). Мы введём его сначала для линейных систем в следующей лекции.

Фазовое пространство. Чтобы освоиться с этим понятием, рассмотрим пример, где уже одно введение фазового пространства позволяет

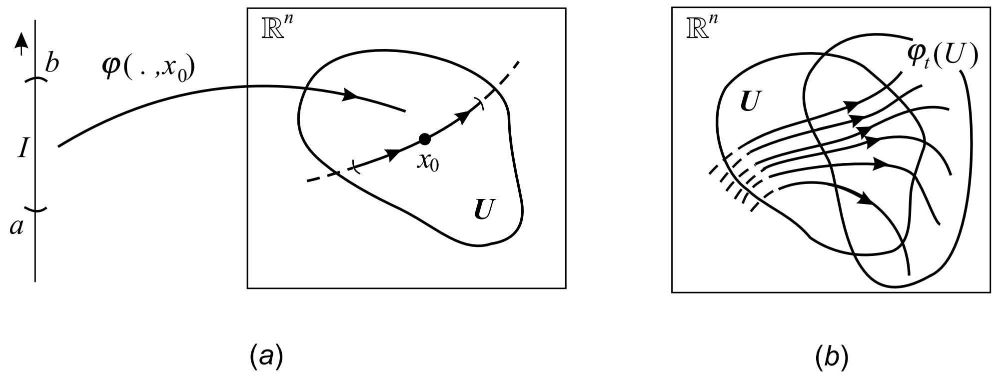

Рис. 2: Траектория или фазовая кривая $\varphi(t, x_0)$ (a) и поток φ_t (b)

Рис. 3: Схема дорог между A и B. Начальное положение возов

решить трудную задачу.

Задача 2. Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги (Рис. 3). Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные верёвкой некоторой длины, меньшей $2l$, смогли проехать из A в B, не порвав верёвки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса l, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Решение: Рассмотрим квадрат $M = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq 1\}$, где x_i – доля расстояния от A до B по i-ой дороге (Рис. 4). Различным возможным положениям двух экипажей соответствуют точки квадрата M. Тогда M – это фазовое пространство, а его точки – фазовые точки. Всякое движение экипажей изображается движением фазовой точки в фазовом пространстве. Из Рис. 4 видно, что пара возов непременно займёт положение, в котором была в некоторый момент пара машин. Следовательно, расстояние между центрами возов в этот момент будет строго меньше, чем $2l$. Итак, возы разминуться не смогут.

Для решения этой задачи нам даже не потребовалось вводить дифференциальные уравнения.

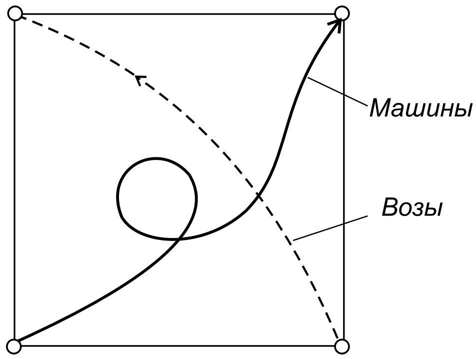

Рис. 4: Фазовое пространство M пары экипажей

Рассмотрим другой пример фазового пространства динамической системы. Из эксперимента извество, что скорость размножения бактерий при достаточном запасе пищи пропорциональна их количеству x. Здесь фазовое пространство U – полупрямая $x > 0$, а векторное поле определяется функцией $f(x) = kx$ с коэффициентом пропорциональности $k > 0$. Дифференциальное уравнение запишется в виде $\dot{x} = kx$ и решение задачи Коши с начальным условием $x(0) = x_0$ в точке $t = 0$ будет экспоненциально расти с увеличением времени: $x(t, x_0) = \mathbf{e}^{kt}x_0$. Это простейшая модель процесса размножения, когда прирост пропорционален наличному числу особей.

Сформулируем теперь без доказательства основную *теорему локального существования и единственности решения задачи Коши.*

Теорема 1. Пусть $U \subset R^n$ – некоторое открытое подмножество евклидова пространства, $f : U \to R^n$ – непрерывно дифференцируемое отображение (класса $\mathbf{C^1}$) и $x_0 \in U$. Тогда существуют некоторая константа c и единственное решение $x(t, x_0) : (-c, c) \to U$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению (1) с начальным условием $x(0, x_0) = x_0$.

На самом деле, для существования и единственности решения достаточно, чтобы функция f была лишь (локально) липшицевой, то есть удовлетворяла *условию Липшица*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

для некоторого $L < \infty$, где L называется *константой Липшица* для f. Следовательно, мы можем иметь дело даже с кусочно-линейными функциями.

Интуитивно ясно, что решение может покинуть U через достаточно большое время. Поэтому мы говорим, что данная теорема является *локальной*. Мы легко можем построить векторное поле $f : U \to R^n$ такое, что $x(t)$ покидает любое ограниченное подмножество $U \subset R^n$ за конечное время. Например, уравнение

$$\dot{x} = 1 + x^2$$

имеет неограниченно растущие решения $x(t) = \operatorname{tg}(t + c)$.

Таким образом, хотя существует много уравнений, для которых решение существует для всех $t > 0$, то есть во всем времени глобально, мы не можем утверждать этого для произвольной заданной системы ОДУ без дополнительного исследования.

Неподвижные точки системы ОДУ. Понятие устойчивости

Важный класс решений дифференциальных уравнений составляют *положения равновесия* или *неподвижные точки*. Неподвижные точки x_s определяются как нули векторного поля $f(x)$:

$$f(x_s) = 0.$$

Это *целая траектория*, так как $x(t) = x_s$ для всех t от $-\infty$ до $+\infty$.

Неподвижная точка x_s называется *устойчивой по Ляпунову*, если любое решение с близкими начальными данными (или, что то же самое, *возмущенное движение*) все время остается близким к x_s, то есть для каждой окрестности V точки x_s из U существует окрестность $V_1 \subset V$ такая, что любое решение $x(t, x_0)$ с $x_0 \in V_1$ определено и лежит в V для всех $t > 0$. Если, кроме того, V_1 можно выбрать так, что $x(t, x_0) \to x_s$ при $t \to \infty$, то x_s называют *асимптотически устойчивой по Ляпунову* (см. Рис. 5).

Задача 3. Покажите, что неподвижные точки обеих систем

$$\text{(a)} \;\; \dot{\mathrm{x}} = \mathrm{y}, \;\; \dot{\mathrm{y}} = -\mathrm{x}; \qquad \text{(b)} \;\; \dot{\mathrm{x}} = \mathrm{y}, \;\; \dot{\mathrm{y}} = -\mathrm{x} - \mathrm{y}$$

устойчивы. Какая из них асимптотически устойчива?

Определенные выше понятия устойчивости *локальны* по своей природе: они связаны лишь с поведением решений вблизи неподвижной точки x_s. Даже если такие решения остаются во времени ограниченными, другие решения могут глобально и не существовать.

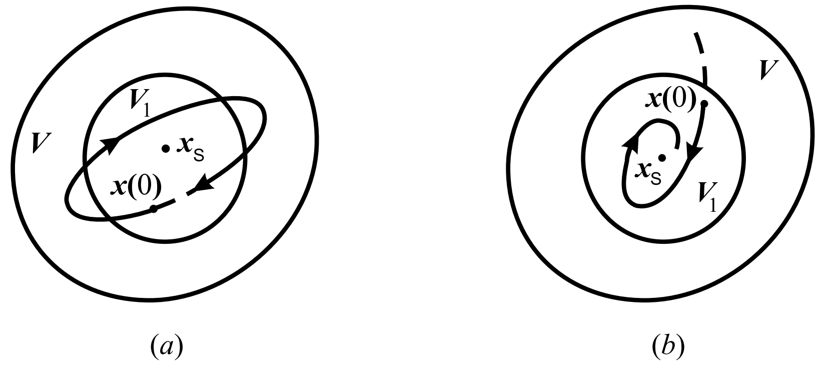

Рис. 5: Фазовые кривые в окрестности устойчивой (a) и асимптотически устойчивой (b) неподвижной точки x_s

Задача 4. Найдите неподвижные точки для уравнения $\dot{x} = -x + x^2$ и выясните их устойчивость. Покажите, что это уравнение допускает наряду с решениями, существующими при любом времени (для всех $t > 0$), также решения, которые становятся неограниченными за конечное время.

Функции Ляпунова. Для того, чтобы показать ограниченность $x(t)$ для всех $t > 0$ и всех начальных данных $x(0)$, можно использовать метод функций Ляпунова, связанный с построением некоторой величины типа энергии или расстояния, убывающей для достаточно больших значений $|x|$. Ввиду такой полезности данного метода, мы кратко опишем его. Этот метод предполагает отыскание некоторой положительно определенной функции $V : U \to R^n$ называемой *функцией Ляпунова*, которая убывает вдоль траекторий дифференциального уравнения.

Теорема 2. Пусть x_s – неподвижная точка системы (1), $V : W \to R$ – дифференцируемая функция, определенная в некоторой окрестности $W \subseteq U$ точки x_s такая что:

(*i*) $V(x_s) = 0$ и $V(x) > 0$ для $x \neq x_s$;

(*ii*) $\dot{V}(x) \leq 0$ в окрестности $W \setminus \{x_s\}$ с выколотой точкой x_s.

Тогда неподвижная точка x_s устойчива.

Более того, если (*iii*) $\dot{V}(x) < 0$ в $W \setminus \{x_s\}$, то точка x_s асимптотически устойчива по Ляпунову.

Здесь $\dot{V}$ представляет собой производную по t от функции $V(x)$ вдоль решения $x(t)$ системы (1):

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot f_j(x).$$

Если в условии (iii) можно выбрать в качестве окрестности W все множество U или все пространство R^n, то неподвижную точку x_s называют *глобально асимптотически устойчивой.* Тогда все решения остаются ограниченными и приближаются к x_s при $t \to \infty$.

Построение функции Ляпунова позволяет проверить устойчивость положений равновесия и ограниченность решений дифференциальных уравнений, фактически, без явного определения решений. Хотя не существует общих методов отыскания функций Ляпунова, в задачах механики довольно часто такой функцией является энергия.

Пример. Рассмотрим движение частицы массы m, прикрепленной к пружине жесткости $k(x + x^3)$, где $k > 0$ и x – смещение частицы относительно положения равновесия. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее движение частицы, имеет вид

$$m\ddot{x} + k(x + x^3) = 0.$$

Полагая $\dot{x} = y$, приходим к системе двух дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\frac{k}{m}(x + x^3). \tag{5}$$

Соответствующая общая энергия системы $E(x, y)$ имеет вид

$$E(x, y) = \frac{my^2}{2} + k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right).$$

Заметим, что $E(x, y)$ является функцией Ляпунова для системы (5), так как $E(0, 0) = 0$ в единственном положении равновесия $(x_s, y_s) = (0, 0)$ и $E(x, y) > 0$ для $(x, y) \neq (0, 0)$. Кроме того, имеем

$$\dot{E} = my\dot{y} + k(x + x^3)\dot{x} = -ky(x + x^3) + ky(x + x^3) \equiv 0.$$

Поэтому стационарная точка (положение равновесия) нейтрально устойчива и является центром, то есть все траектории в ее окрестности замкнуты. Следовательно, все решения ограничены.

Если в системе учитывать вязкое трение с коэффициентом $\alpha > 0$, то уравнения движения (5) примут вид

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\frac{k}{m}(x + x^3) - \alpha y. \tag{6}$$

Тогда для той же самой функции Ляпунова получаем

$$\dot{E} = -\alpha m y^2.$$

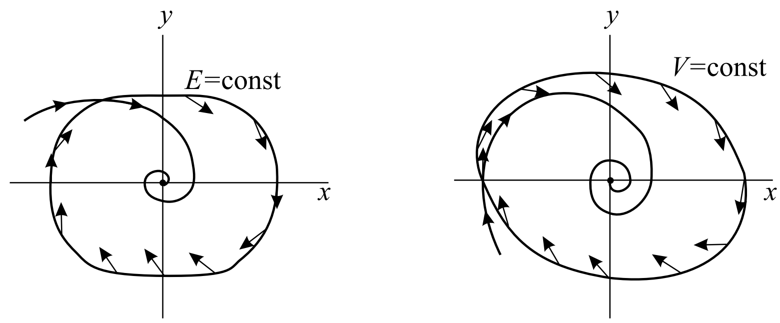

Рис. 6: Схема векторного поля на линиях уровня функций $E(x,y)$ и $V(x,y)$ для системы (6)

Эта величина отрицательна для всех $(x,y) \neq (0,0)$, исключая ось x. Попробуем слегка изменить функцию Ляпунова, полагая

$$V(x,y) = \frac{my^2}{2} + k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) + \beta\left(xy + \frac{\alpha x^2}{2}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (my + \beta x)\dot{y} + k(x + x^3)\dot{x} + \beta(y + \alpha x)\dot{x} = \\ &= -\beta\frac{k}{m}(x^2 + x^4) - y^2(\alpha m - \beta). \end{aligned}$$

Теперь, если выбрать β достаточно малым, $0 < \beta < \alpha m$, то $V(x,y)$ остается положительно определенной, а ее производная $\dot{V}$ будет отрицательно определена для всех $(x,y) \neq (0,0)$. Таким образом, положение равновесия $(0,0)$ – глобально асимптотически устойчиво при $\alpha > 0$.

Дифференцируя функцию V вдоль решения дифференциального уравнения, мы пытаемся проверить, что все траектории пересекают линии уровня функции V "снаружи внутрь".

Рисунок линий уровня функции E и модифицированной функции V для данного примера показывает, что у функции V они слегка наклонены, так что векторное поле нигде их не касается, тогда как даже при наличии трения векторное поле касается линий $E =$const на оси $y = 0$ (см. Рис. 6).

Задача 5. Используя функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\left(x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2\right),$$

получить условия на σ, ρ и β, достаточные для асимптотической устойчивости начала координат $(x,y,z) = (0,0,0)$ в системе Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \qquad \dot{y} = \rho x - y - xz, \qquad \dot{z} = \beta z + xy, \qquad \sigma > 0,\ \beta > 0,\ \rho > 0.$$

Являются ли эти условия необходимыми?

Локальную теорему существования и единственности решения задачи Коши можно дополнить утверждением о зависимости решения от начальных данных.

Теорема 3. Пусть множество $U \subseteq R^n$ открыто, а функция $f: U \to R^n$ является липшецевой с константой L. Пусть $y(t)$, $z(t)$ – два решения уравнения $\dot{x} = f(x)$ на замкнутом интервале $[t_0, t_1]$. Тогда для всех $t \in [t_0, t_1]$ имеет место оценка

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| \cdot \mathbf{e}^{L(t-t_0)}.$$

Заметим, что непрерывная зависимость решения от начальных данных не исключает экспоненциально быстрого разбегания решений с близкими начальными условиями, типичного для хаотических потоков, с которыми нам предстоит встретиться в последующих лекциях. Простой пример такого поведения решений ОДУ показан на Рис. 7.

Задача 6. Какие из следующих систем порождают глобально определенные потоки:
(a) $\dot{x} = x, \quad x \in R$;
(b) $\dot{x} = 2 + \cos x, \quad x \in R$;
(c) $\dot{x} = -x^3, \quad x \in R$;
(d) $\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n$;
где A – постоянная матрица размерности $n \times n$, $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in R$.

Задача 7. Покажите, что уравнение $\dot{x} = x^{2/3}$, $x \in R$, не обладает свойством единственности решения для всех начальных данных $x(0)$. При каких условиях решение единственно?

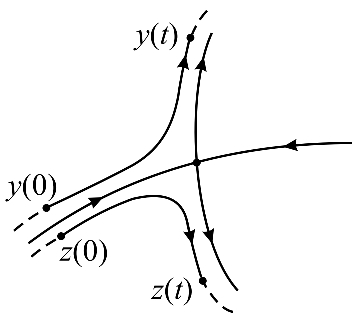

Рис. 7: Экспоненциальное разбегание близких решений в окрестности седловой точки