

Лекция 10 Приложение

Дифференциальные уравнения на двумерном торе

Двумерный тор. Прямое произведение двух окружностей

$$T^2 = S^1 \times S^1 = \{x \in R^4 : x_1^2 + x_2^2 = C, \quad x_3^2 + x_4^2 = D\}$$

называется *двумерным тором*.

Чтобы лучше представить себе тор T^2 , можно поступить следующим образом. Рассмотрим в R^3 поверхность баранки, полученную при вращении окружности вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее. Точка такой поверхности задается двумя угловыми координатами $\varphi_1, \varphi_2 \pmod{2\pi}$. Координаты φ_1 и φ_2 задают диффеоморфизм поверхности баранки и прямого произведения T^2 двух окружностей (см. Рис. 1).

Координаты φ_1 и φ_2 можно называть *долготой* и *широтой*. Карту тора T^2 можно изобразить на квадрате $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ плоскости (φ_1, φ_2) , склеив точки $(\varphi_1, 0)$ с $(\varphi_1, 2\pi)$ и $(0, \varphi_2)$ с $(2\pi, \varphi_2)$. Можно также считать картой всю плоскость, но тогда точка тора будет иметь бесконечное число изображений на карте (см. Рис. 2).

Фазовый поток системы

$$\dot{x}_1 = -\omega_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = \omega_1 x_1, \quad (1)$$

$$\dot{x}_3 = -\omega_2 x_4, \quad \dot{x}_4 = \omega_2 x_3 \quad (2)$$

оставляет тор T^2 на месте. Фазовые кривые системы (1)-(2) лежат на поверхности T^2 . Если φ_1 – полярный угол на плоскости (x_1, x_2) , отсчитываемый от орта x_1 к орту x_2 , то согласно (1) $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$. Аналогично, отсчитывая φ_2 от x_3 к x_4 , получаем $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$.

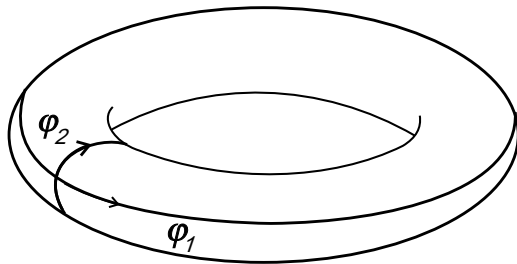


Рис. 1: Параметризация поверхности тора T^2

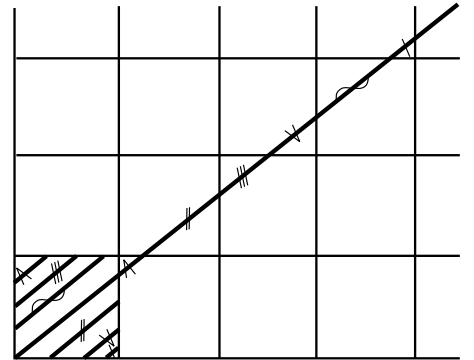


Рис. 2: Карта тора на плоскости

Задача 1. Покажите, что, действительно, $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ и $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$.

Таким образом, фазовые траектории потока (1)-(2) на поверхности тора T^2 удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2. \quad (3)$$

Широта и долгота фазовой точки меняются равномерно, и на карте тора движение изображается прямой линией, а на поверхности баранки получается "обмотка".

Фазовые кривые уравнения (3) на торе.

Числа ω_1 и ω_2 называются *рационально независимыми*, если из равенства $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ с целыми k_1 и k_2 следует $k_1 = k_2 = 0$. Например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$ рационально зависимы, а $\sqrt{6}$ и $\sqrt{8}$ нет.

Теорема. Если ω_1 и ω_2 рационально зависимы, то всякая фазовая кривая (3) на торе замкнута. Если же ω_1 и ω_2 рационально независимы, то всякая фазовая кривая уравнения (3) всюду плотна на торе T^2 .

Лемма. Рассмотрим поворот окружности S^1 на угол α , несоизмеримый с 2π . Тогда образы любой точки на окружности при повторении поворота

$$\varphi, \quad \varphi + \alpha, \quad \varphi + 2\alpha, \quad \varphi + 3\alpha, \dots \pmod{2\pi}$$

образуют множество, всюду плотное на окружности.

Принцип ящиков Дирихле. Если в k ящиках лежит $k + 1$ предмет, то хотя бы в одном ящике больше одного предмета.

Разделим окружность на k равных полуинтервалов $I_r = [2\pi\frac{r}{k}, 2\pi\frac{r+1}{k})$, $r = 0, 1, \dots, k - 1$, каждый длиной $2\pi/k$. По принципу ящиков среди первых $k + 1$ точек нашей последовательности есть 2 точки в одном полуинтервале I_r . Пусть это точки $\varphi + p\alpha$ и $\varphi + q\alpha$, $p > q$, то есть сначала точка попадает в полуинтервал I_r за q шагов, а потом за последующие $p - q$ шагов точка опять попадает в I_r (см. Рис. 3). Обозначим через $s = p - q$. Следовательно, угол поворота $s\alpha$ отличается от кратного 2π меньше, чем на $2\pi/k$, и в последовательности точек

$$\varphi, \quad \varphi + s\alpha, \quad \varphi + 2s\alpha, \quad \varphi + 3s\alpha, \quad \dots \pmod{2\pi}$$

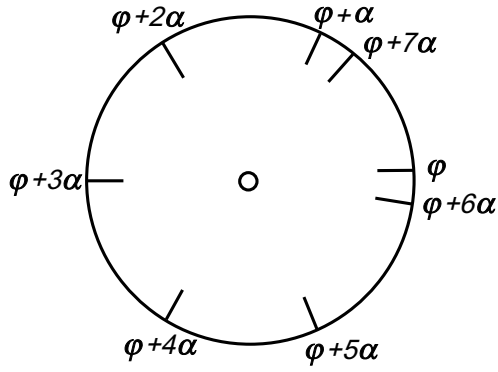


Рис. 3: Образы точки φ окружности при повторении поворота на угол α

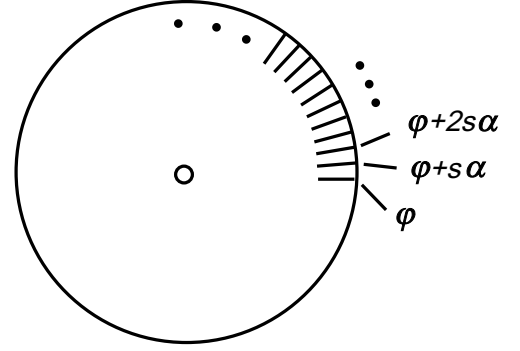


Рис. 4: Точки $\varphi + Ns\alpha$ на окружности

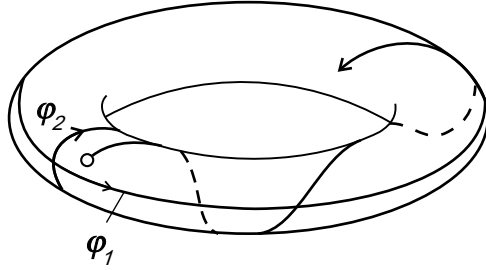
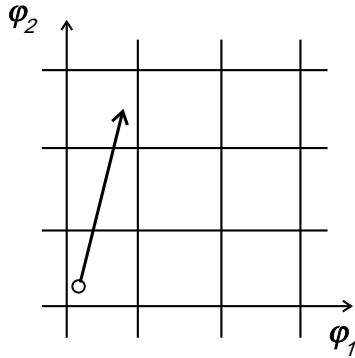


Рис. 5: Фазовая кривая системы (3) на поверхности тора (обмотка тора T^2)

каждые две соседние точки отстоят на одинаковое расстояние, меньшее чем $2\pi/k$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выбрав k достаточно большим, мы можем сделать $2\pi/k < \varepsilon$. Тогда в любой ε -окрестности любой точки S^1 есть хотя бы одна точка последовательности

$$\varphi + Ns\alpha \pmod{2\pi}$$

(см. Рис. 4). Лемма доказана.

Замечание. Мы не использовали несоизмеримости α с 2π . Между тем очевидно, что при α , соизмеримом с 2π , лемма неверна.

Доказательство теоремы. Решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \omega_1 t, \quad \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + \omega_2 t. \quad (4)$$

Пусть ω_1 и ω_2 рационально зависимы:

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0, \quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0.$$

Рассмотрим условие периодичности для функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$:

$$\varphi_1(T) \pmod{2\pi} = \varphi_1(0), \quad \varphi_2(T) \pmod{2\pi} = \varphi_2(0),$$

или, что то же самое,

$$\omega_1 T = 2\pi m, \quad \omega_2 T = 2\pi n, \quad (5)$$

где m и n – целые. Из (4) и (5) следует, что

$$k_1 m + k_2 n = 0.$$

Не ограничивая общности, будем предполагать, что $k_2 > 0$. Отсюда получаем что уравнения (5) при $m = k_2$, а $n = -k_1$ относительно T

$$\omega_1 T = 2\pi k_2, \quad \omega_2 T = -2\pi k_1$$

совместны. Их решение

$$T = \frac{2\pi k_2}{\omega_1} = -\frac{2\pi k_1}{\omega_2}$$

является периодом замкнутой кривой (4).

Пусть ω_1 и ω_2 рационально независимы. Тогда ω_1/ω_2 – иррациональное число. Рассмотрим последовательные точки пересечения фазовой кривой (4) с меридианом $\varphi_1 = 0 \pmod{2\pi}$. Широты этих точек будут

$$\varphi_{2,k} = \varphi_{2,0} + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} k \pmod{2\pi}.$$

Согласно Лемме, множество точек пересечения всюду плотно на меридиане. Заметим, что прямые, проведенные из точек множества, всюду плотного на прямой, лежащей в плоскости, по направлению, не совпадающему с направлением этой прямой, образуют всюду плотное множество на плоскости. Поэтому отображение

$$\bar{\varphi}_1(t) = \varphi_1(t) - 2\pi \left\lfloor \frac{\varphi_1(t)}{2\pi} \right\rfloor, \quad \bar{\varphi}_2(t) = \varphi_2(t) - 2\pi \left\lfloor \frac{\varphi_2(t)}{2\pi} \right\rfloor,$$

фазовой кривой (4) на квадрате

$$0 \leq \bar{\varphi}_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \bar{\varphi}_2 < 2\pi$$

всюду плотно. Итак, фазовая кривая уравнения (3) и, значит, уравнений (1)-(2), всюду плотна на торе.

Свойства хаотических отображений

Будем говорить, что отображение $f : I \rightarrow I$ обладает свойствами:

(i) *чувствительная зависимость от начальных условий*,

если существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in I$ и любого интервала J , содержащего точку x ($x \in J$), существуют $y \in J$ и $n > 0$ такие, что $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$,

(ii) *топологическая транзитивность*:

если для любой пары открытых множеств $A, B \subset I$ существует $n > 0$ такое, что $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$,

(iii) *перемешивание*,

если для любой пары открытых множеств $A, B \subset I$ существует $N_0 > 0$ такое, что для $n > N_0$ выполняется $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

Очевидно, что отображение, обладающее свойством перемешивания, является топологически транзитивным.

Инвариантная мера $\rho(x)$ – плотность итераций отображения $x_{n+1} = f(x_n)$, где $x_n \in [0, 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ на единичном интервале и определяется следующим образом:

$$\rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta[x - f^i(x_0)], \quad (6)$$

где $\delta[\cdot]$ – дельта-функция Дирака. Показано, что $\rho(x)$ стационарна, то есть не изменяется во времени под действием отображения $f(x)$, и является решением интегрального уравнения Фробениуса-Перрона

$$\rho(y) = \int_0^1 \delta[y - f(x)] \cdot \rho(x) dx. \quad (7)$$

Корреляционная функция $C(m)$ для отображения $x_{n+1} = f(x_n)$, где $x_n \in [0, 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ определяется следующим образом:

$$C(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \hat{x}_{i+m} \hat{x}_i, \quad (8)$$

где

$$\hat{x}_i = f^i(x_0) - \bar{x}, \quad \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f^i(x_0). \quad (9)$$

Это характеристика стохастичности последовательности $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$, которая показывает, насколько отклонения от среднего значения

$$\hat{x}_i = x_i - \bar{x}, \quad (10)$$

вычисленные через m шагов (то есть $\hat{x}_{i+m}$ и $\hat{x}_i$), связаны в среднем друг с другом. Тогда

$$C(m) = \int_0^1 \rho(x) \cdot x \cdot f^m(x) dx - \left[\int_0^1 \rho(x) \cdot x dx \right]^2. \quad (11)$$

Для непрерывных отображений автокорреляционная функция определяется следующим образом:

$$C(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{C}(t) \cdot \hat{C}(t+\tau) dt, \quad \hat{C}(t) = C(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C(\tau) d\tau, \quad (12)$$

и является мерой корреляции между последовательными значениями сигнала. Для регулярных движений она постоянна или осциллирует, а в хаотическом режиме быстро спадает (чаще всего экспоненциально).