Спецкурс

Нелинейная динамика и хаос

Г.А. Чумаков, Н.А. Чумакова

Введение

Динамика имеет дело с системами, эволюционирующими во времени. Стремится ли система, которую мы изучаем, к состоянию равновесия, циклически повторяет поведение или демонстрирует хаотическое движение - это все динамика системы, поведение которой мы анализируем.

Нелинейная динамика является наукой о сложном поведении нелинейных систем, эволюции их во времени (и пространстве), о стабилизации, возникновении хаоса и рождении структур. Иногда нелинейную динамику называют наукой о сложности, а также нелинейной неравновесной термодинамикой. Она возникла в 30-х г.г. XX века на основе нелинейной теории колебаний и волн.

Эволюционный процесс будем называть *детерминированным*, если весь его будущий ход и все его прошлое однозначно определяется состоянием в настоящее время. Множество всевозможных состояний эволюционного процесса называется *фазовым пространством*.

Достаточно общие ситуации для различных динамических систем (гетерогенных каталитических реакций или биологических сообществ) приводят к моделям в виде систем нелинейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Переменные могут представлять, например, концентрации реагирующих веществ в химическом реакторе, а нелинейные правые части определяются схемой реакции и скоростями отдельных стадий.

Хорошо известно, что многие системы нелинейных уравнений невозможно решить аналитически. Это усложняет их теоретическое исследование. Однако многие реальные системы в приложениях, например, в катализе или биологии, не ведут себя как линейные системы. Так, в химической кинетике именно нелинейность отвечает за формирование хаоса и кинетической турбулентности.

Что такое хаос? Начнем с интуитивных представлений. Традиционно примером случайного процесса служит подбрасывание идеальной монеты. Представим себе, что один эксперимент состоит в том, что монета подбрасывается бесконечное число раз. Присвоим 'орлам' – значение 0, а 'решкам' - 1, тогда исход случайного эксперимента можно описать некоторой бесконечной последовательностью, состоящей из 0 и 1. И все эти последовательности равновероятны! С другой стороны, собственно подбрасывание монеты - это детерминированный механический процесс, который определяет движение монеты, и, следовательно, результат 'орел' или 'решка' зависит только от очень чувствительных факторов в момент подбрасывания монеты. Такое свойство динамики системы получило название "чувствительная зависимость от начальных условий".

В 70-х годах XX века научная общественность узнала о научной революции, которая связана с появлением "Теории хаоса". Чувствительная зависимость от начальных данных стала играть ключевую роль в этой новой науке. И как следствие теории хаоса, мир узнал, что философия детерминизма, которая базировалась на законах классической физики и уравнениях, имеющих свойство, что начальные данные определяют решение однозначно для всех t, - философия детерминизма стала уязвимой на разных уровнях.

Параллельно с теорией хаоса развивается компьютерная динамика – исследование нелинейных систем с использованием современных компьютеров, методов качественной теории динамических систем и современных методов вычислительной математики.

Как указал американский математик, профессор Стив Смейл в своей статье "Математические проблемы следующего столетия" (1998), систематическое развитие компьютерной динамики только начинается и является одной из фундаментальных задач этого столетия. В частности, вместе с 14 проблемой об аттракторе Лоренца, Смейл формулирует следующую проблему:

(1) Является ли данная динамическая система хаотичной?

(2) Существует ли алгоритм, который по коэффициентам динамической системы на входе выдавал бы на выходе ДА или НЕТ в зависимости от того, хаотична система или нет?

Этот курс мы рассматриваем прежде всего как "руководство" к стремительно развивающейся области знаний - "Теории хаоса". Поэтому для обсуждения выбраны только те результаты, которые имеют приложение к физическим, химическим или биологическим проблемам, и не приводятся, в основном, доказательства тех теорем, которые не служат иллюстрацией этого прикладного аспекта.

Мы будем использовать геометрический подход к теории динамических систем, подчеркивая повсюду геометрические и топологические свойства решений дифференциальных уравнений и дискретных динамических систем.

Изложение сконцентрировано на приложениях в области *нелинейных колебаний*. Это сделано по трем причинам:

(1) в этой области существует много важных и интересных задач,

(2) геометрический анализ двумерных систем хорошо представлен в работах Александра Александровича Андронова и его школы,

(3) наиболее абстрактные математические идеи и примеры, известные в теории динамических систем, находят "естественное" приложение в задачах нелинейных колебаний.

Данный курс лекций можно рассматривать как попытку изложения результатов, которые расширяют работы А.А.Андронова и его школы на системы с размерностью, на единицу большую. Эта цель не столь скромна и ее не так просто достичь, как это может показаться. Добавление одной переменной, порождающее системы третьего порядка, может привести к бесконечному множеству новых явлений в дополнение к неподвижным точкам и предельным циклам, знакомым из теории нелинейных колебаний на плоскости.

Если упростить ситуацию, то можно сказать, что "чистый" математик стремится получить какое-либо приятное или неприятное свойство и затем построить некоторую динамическую систему, решения которой обладают этим свойством. Напротив, традиционно роль прикладного математика состоит в исследовании заданной системы (или, возможно, построенной им модели) и отыскания свойств, которыми она обладает.

Мы, главным образом, ориентируемся на приложения, то есть на проблемы математического моделирования различных физических, химических, биологических процессов, но постараемся применять строгий математический аппарат к исследованию конкретных моделей – динамических систем. При этом мы твердо убеждены, что практика и теория должны развиваться "рука об руку": невозможно определить свойства конкретных систем без знания всех возможностей, которые могут быть выявлены как в рамках общей абстрактной теории, так и на конкретных примерах. Исследование динамических систем на современном уровне предполагает применение современного математического аппарата.

Литература:

1. Дж. Гукенхеймер, Ф.Холмс: Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва, Ижевск , 2002.

2. П. Берже, И. Помо, К. Видаль: Порядок в хаосе. - Москва: Мир, 1991.

3. Г. Шустер: Детерминированный хаос. Москва: Мир, 1988.

4. M. Kubicek and M. Marek: Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures. Springer-Verlag, 1983.

5. А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1986